Chapitre 21

Espaces vectoriels euclidiens.

1 Points importants
2 Plan du cours
3 Questions de cours
4 Exercices types
5 Exercices
6 Exercices corrigés
7 Devoir maison

Chap 21

Espaces vectoriels euclidiens.

Et s'il ne fallait retenir que 8 points ?

1. **Se souvenir des définitions**. En autres, les définitions de produit scalaire, norme euclidienne, norme, distance euclidienne, distance, espace vectoriel euclidien, vecteurs othogonaux, vecteur unitaire, base orthogonale, base orthonormale, projection orthogonale, symétrie orthogonale...

2. **Connaître les produits scalaires usuels**. les produits scalaires usuels sont :

   a) $< (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) > \; = \; \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i y_i$ sur $\mathbb{R}^n$

   b) $< A, B > \; = \; tr({}^t\!AB)$ sur $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Bien se rendre compte c'est quasiment le même que celui sur $\mathbb{R}^n$.

   c) $< f, g > \; = \; \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Attention ce n'est plus un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux puisqu'il n'a plus le caractère défini.

3. **Relations entre le produit scalaire et la norme euclidienne.** Lorsque vous connaissez la norme euclidienne et que vous recherchez le produit scalaire associé, il existe deux formules appelées identités de polarisation :

   a) $< x, y > \; = \; \dfrac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$

   b) $< x, y > \; = \; \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$

   Il existe aussi l'identité du parallélogramme. Toutes les normes provenant d'un produit scalaire vérifie cette propriété. Ceci peut être utile pour montrer qu'une norme n'est pas une norme eucliudienne, c'est-à-dire qu'elle ne provient pas d'un produit scalaire :

   c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \; = \; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$

4. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**. Soient x et y des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien, alors :

   $$< x, y > \; \leq \; \|x\|.\, \|y\|$$

   De plus il y a égalité si et seulement si x et y sont liés. Savoir traduire cette inégalité pour les produits scalaires classiques.

5. **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**. Toute famille libre peut être transformée en une famille orthonormale. Savoir **ABSOLUMENT** utiliser le procédé de Gram-Schmidt, sur des exemples. En particulier ceci nous permet de prouver :

   a) Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale.

   b) Toute famille orthonormale (donc libre) peut être complétée en une base orthonormale.

6. **Expression dans une BON**. Soit E un eve.

   - Dans une BON $(e_A, \dots, e_n)$, les coordonnées d'un vecteur x sont $(< x, e_1 >, \dots, < x, e_n >)$
   - Si $(f_1, \dots, f_m)$ est une bese d'un sev F de E alors la projection orthogonal p sur F peut s'écrire : $p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} < x, f_i > f_i$

7. **Orthogonal d'un ensemble**. Soit E un eve et F un ensemble de E, alors $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F. Les propriétés de $F^\perp$ sont :

1. $A^\perp$ est un sev de E.	2. $A^\perp = (Vect(A))^\perp$	3. $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
4. $\emptyset^\perp = \{0\}^\perp = E$	5. $E^\perp = \{0\}$	6. $F^{\perp^\perp} = F$
7. $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$		

   Les propriétés 5, 6 et 7. utilisent fortement la dimension finie de E. Donc en particulier $F^\perp$ est le supplémentaire privilégié d'un espace vectoriel F.

8. **Le théorème de projection**. Si F est un sev de E tel que $E = F \oplus F^\perp$ (en particulier si F est de DF), alors :

$$d(x, F) \quad = \quad \|x - p(x)\|$$

   où p est la projection orthogonale de E sur F.

Chap 21

Espaces vectoriels euclidiens.

Plan du cours

I. Produit scalaire . . . 2
1/ Définition . . . 2
2/ Exemples . . . 2
3/ Espaces Euclidiens . . . 3
4/ L'inégalité de Cauchy-Schwarz. . . . 3
5/ Norme euclidienne . . . 3
6/ Identités de polarisation. . . . 6
7/ Identité du parallélogramme. . . . 6
8/ A quoi servent les normes. . . . 6

II. Orthogonalité . . . 6
1/ Définition . . . 6
2/ Propriétés . . . 6
3/ Le théorème de Pythagore . . . 6
4/ Somme directe orthogonale. . . . 7
5/ Familles orthogonales, familles orthonormales . . . 7

III. Projections et symétries orthogonales. . . . 8
1/ Autour de $E = F \oplus F^{\perp}$. . . . 8
2/ Définitions. . . . 8
3/ Caractérisation pratique du projeté orthogonal. . . . 8
4/ Expression dans une BON. . . . 8
5/ Théorème de projection. . . . 8
6/ Exemples d'application. . . . 8

IV. Espaces vectoriels euclidiens . . . 8
1/ composantes d'un vecteur dans une BON . . . 8
2/ Expression du produit scalaire scalaire dans une BON . . . 8
3/ Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . 9
4/ Conséquences . . . 11

Chap 21

Espaces vectoriels euclidiens.

Questions de cours

1. Donner la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, puis donner les produits scalaires classiques sur les $\mathbb{R}$ espaces vectoriels : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}[X]$. (I)

2. Donner la définition d'un espace pré-hilbertien réel et d'un espace vectoriel euclidien. Vous donnerez deux exemples de chaque. (I)

3. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et indiquer une CNS pour avoir égalité. Vous traduirez enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires classiques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ (I)

4. Rappeler et montrer les deux identités de polarisations (Relation entre le produit scalaire et la norme). Déterminer par un calcul le produit scalaire associé au module dans $\mathbb{C}$. (II)

5. Rappeler l'identité du parallélogramme. En déduire qu'il existe des normes non euclidiennes. (II)

6. Soit A et B des sous-ensembles du préhilbertien réel $(E,<,>)$. Donner la définition de $A \perp B$ et de $A^{\perp}$. (III)

7. Déterminer une base orthonormale de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Vous prouverez votre résultat. (IV)

8. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une BON de $(E,<,>)$. Exprimer les coordonnées d'un vecteur x en fonction du produit scalaire. Vous montrerez votre résultat. (IV)

9. Soit $\beta = (e_1,\ldots,e_n)$ une BON de $(E,<,>)$. Exprimer $< x, y >$ en fonction des coordonnées de x et y dans la base β. Vous montrerez votre résultat. (IV)

10. Expliquer le procédé de Gram-schmidt. Redresser la famille $(1, e^x, e^{2x})$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec le procédé de Gram-Schmidt. (IV)

11. Soit F un sev de l'espace vectoriel euclidien $(E,<,>)$. Montrer qu'on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$. Donner un contre-exemple de ce résultat en dimension infinie (pas de preuve demandée). (IV)

12. Soit F un sev de l'espace vectoriel euclidien $(E,<,>)$. Montrer qu'on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$. Donner un contre-exemple (sans preuve) en dimension infinie. (IV)

13. Soit F un sev de l'espace vectoriel euclidien $(E,<,>)$ et p la projection orthogonale sur F. Exprimer $p(x)$ dans une BON $(f_1,\ldots,f_q)$ de F. (IV)

14. Montrer que $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E. (IV)

Chap 21

Espaces vectoriels euclidiens.

Exercices types

Exercice 1 -

Considérons les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. Utiliser l'algorithme de Gramm Scmidt sur la famille (A, B, C) pour la rendre orthonormale.
2. On pose $M_1 = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{21})$, $M_2 = \frac{1}{2}(E_{11} - E_{21})$, $M_3 = \frac{1}{2}(E_{21} + E_{22})$, $M_4 = \frac{1}{2}(E_{21} - E_{22})$. Montrer que la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base orthonormale.
3. Rappeler l'expression d'un vecteur dans une base orthonormale, puis donner les coordonnées de A dans la base (M_1, M_2, M_3, M_4)

Exercice 2 -

Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les espaces vectoriels formés respectivement par les matrices symétriques et par les matrices anti-symétriques de taille n.

1. Rappeler le théorème de projection dans un espace préhilbertien.
2. Montrer que $< A, B >= tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme est orthogonale.
4. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \underset{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \|A - B\| \;=\; \underset{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \sqrt{< A - B, A - B >}$$

   Justifier l'existence de $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

5. montrer que :

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \left\| \frac{1}{2} \left(A - {}^tA \right) \right\|$$

Exercice 3 -

1. Montrer que

$$< P, Q >= \int_0^{2\pi} P(\cos(x))Q(\cos(x))dx$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Rappeler la définition du $n^{\text{ième}}$polynôme de Tchebitchev T_n. Aucune preuve n'est demandée.
3. Montrer que la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini en 1. Que vaut $\|T_k\|$ pour k dans $\mathbb{N}$?

Chap 21

Espaces vectoriels euclidiens.

Exercices

Il est souvent trop tôt pour savoir s'il n'est pas trop tard.

Pierre Dac.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit f une forme bilinéaire sur k-espace vectoriel E, alors pour tout x de E et tout λ de k, on a : $f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda.(x, y)$
2. Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
3. Soit A dans un eve E, alors $A \cap A^{\perp} = \{0\}$
4. Une famille de n vecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension n est une base.

Niveau 1

Exercice 2.

Soient F et G deux sev d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \qquad\qquad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Exercice 3.

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur l'espace vectoriel F défini par le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 - endomorphismes antisymétriques.

Soit $(E, <, >)$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad < x, u(x) > \ = \ 0$$

1. Montrer que : $\forall x, y \in E$, $< u(x), y >= - < x, u(y) >$.
2. En déduire que $E = Ker(u) \overset{\perp}{\oplus} Im(u)$.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel euclidien, F un sev de E et p une projection sur F. On se propose de montrer que :

$$p \text{ est une projection orthogonale} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

1. Montrer que si p est une projection orthogonal alors $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x de E.
2. Soit x dans $Ker(p)$, y dans $Im(p)$. Montrer que si $Ker(p)$ et $Im(p)$ ne sont pas orthogonaux alors il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\|p(x + \lambda.y)\| > \|x + \lambda.y\|$$

3. Conclure.

Exercice 6.

On pose pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$: $< P, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1 + x^2)dx$.

1. Montrer que $<, >$ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

® Exercice 7.

Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs de l'espace formant entre eux des angles supérieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 8.

On pose pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$: $< P, Q >= \displaystyle\int_{0}^{1} P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $<, >$ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer le minimum pour (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

4. Traduire le résultat précédent en terme de distance à un sous-espace.

Exercice 9.

Soient E un espace vectoriel euclidien, β une BON de E et f, g des endomorphismes de E qui **commutent**. Supposons de plus que M et N les matrices de f et g dans β sont respectivement symétrique et antisymétrique.

1. Montrer que les matrices de f sont symétriques dans toute autre BON et que les matrices de g sont antisymétriques. Les endomorphismes f et g sont appelés respectivement des endomorphismes symétrique et antisymétrique.
2. Montrer que pour tout x, y de E :
$$\begin{cases} < f(x), y > & = & < x, f(y) > \\ < g(x), y > & = & - < x, g(y) > \end{cases}$$
3. Montrer que : $\forall x \in E \ < f(x), g(x) >= 0$
4. Montrer que : $\forall x \in E \ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$

Niveau 2

Exercice 10.

Soit A une matrice de $E = M_n(\mathbb{C})$ de coefficients (a_{ij}). La matrice $\overline{A}$ désignera la matrice de coefficients $\left(\overline{a_{ij}}\right)$.

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $tr({}^t\overline{A}A) \in \mathbb{R}^+$. On note $\|A\| = \sqrt{tr({}^t\overline{A}A)}$.
2. Montrer que pour toute matrice A de E :
$$\left| \, tr({}^t\overline{A}B) \, \right| \ \leq \ \|A\|.\|B\|$$
En déduire que $\| \ \|$ est une norme sur E.
3. On note $O(E)$ les matrices de E vérifiant ${}^t\overline{A}A = I_n$. Montrer que $O(E)$ est inclus dans la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$.
4. Montrer que les translations $\ t_{_A} : M \mapsto AM \ $ et $\ t'_{_A} : M \mapsto MA \ $ pour A dans E, sont des isométries de $O(E)$ c'est-à-dire que $\|M\| = \|AM\| = \|MA\|$ pour toute matrice A de E et M de $O(E)$.

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur normé de E de coordonnées (a, b, c) dans la base β.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ dans la base β.
2. En déduire la nature de l'endomorphisme q défini par la matrice :
$$\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ba & c^2+a^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$
3. En se servant de la question précédente, déterminer la matrice de la projection sur $(e_1 - 2e_2 + e_3)^\perp$.

Chap 21

Espaces vectoriels euclidiens.

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 7.**

Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs de l'espace formant entre eux des angles supérieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$.

- -

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe trois vecteurs, que l'on peut supposer normés, u, v et w de l'espace tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} <u,v>=\cos(\widehat{u,v}) < \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ <u,w>=\cos(\widehat{u,w}) < \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ <v,w>=\cos(\widehat{v,w}) < \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Par ailleurs, on a :

$$\|u+v+w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(<u,v> + <u,w> + <v,w>) \; < \; 3 + 2.\frac{-3}{2} \; = \; 0$$

ce qui est absurde

Espaces vectoriels euclidiens.

Devoir maison

Problème - Orthogonalité des polynômes de Legendre

On définit les polynômes de Legendre par

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}\ \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

où la puissance (n) désigne la dérivée n$^{\text{ième}}$. Posons

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, $P_k = (X^2-1)^k$.

1. Montrer que $< \ ,\ >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer L_0, L_1 et L_2 et montrer que L_n est de degré n. Que vaut $P_n^{(2n)}$?
3. Montrer que si $p < q$ alors 1 et -1 sont racines de $P_q^{(p)}$.
4. Soient m et n dans $\mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \int_{-1}^{1} P_n^{(n)} P_m^{(m)} = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)} P_m^{(m+k)}$$

5. En déduire que si $m \neq n$ alors $< L_m, L_n >= 0$. On pourra différencier les cas $m < n$ et $m > n$.