Chapitre 19

Polynômes.

1 Points importants
2 Plan du cours
3 Questions de cours
4 Exercices types
5 Exercices
6 Exercices corrigés
7 Devoir maison

Chap 19

Polynômes.

Et s'il ne fallait retenir que cinq points ?

1. **Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines (comptées avec leur multiplicité).** Ainsi pour montrer qu'un polynôme est nul, on montre qu'il admet plus de racines que son degré, ou si le degré ne peut être déterminé, on montre qu'il en admet une infinité. En particulier pour montrer que deux polynômes sont égaux, on peut montrer que la différence est le polynôme nul par la méthode précédente.

2. **Théorème de D'Alembert-Gauss.** Il peut prendre plusieurs formes :
   a) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.
   b) Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, c'est-à-dire qu'il est produit de polynôme de degré 1 : $P = \mu \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_i)$
   c) Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet autant de racines (comptées avec leur multiplicité) que le degré de P
   d) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

3. **Décomposition d'un polynôme à coefficients réels.** Tout polynôme P se décompose de la façon suivante :
$$P = \mu \prod_{i=0}^{r}(X - \lambda_i)^{r_i} \prod_{i=0}^{s}(X^2 + a_i X + b_i)^{s_i}$$
   où μ est le coefficient dominant, λ_i les racines réelles de P et a_i, b_i des réels tels que $a_i^2 - 4b_i < 0$.
   Plusieurs remarques s'imposent :
   a) si on désire l'unicité de la décomposition, il faut choisir les λ_i différents et les couples (a_i, b_i) différents.
   b) les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 avec un Δ négatif.
   c) Pour décomposer un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles, on le décompose sur $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les racines conjuguées (Savoir refaire par exemple $X^{2n} - 1$).

4. **Caractérisation de la multiplicité des racines avec la dérivée :**
$$\lambda \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \Longleftrightarrow \begin{cases} P^{(k)}(\lambda) = 0 & \text{si } \ k < r \\ P^{(r)}(\lambda) \neq 0 & \end{cases}$$

5. **Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.** Si le polynôme P s'écrit $a_n X^n + \ldots + a_0$ alors la somme $S = \sigma_1$ et le produit $P = \sigma_n$ des racines vaut :

$$S = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad\qquad P = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

6. **Degré et valuation d'une somme ou d'un produit.**
   a) $Deg(PQ) = Deg(P) + Deg(Q)$ $\qquad$ $Val(PQ) = Val(P) + Val(Q)$.
   b) $Deg(P + Q) \leq Max(Deg(P), Deg(Q))$ $\qquad$ $Val(P + Q) \geq Min(Val(P), Val(Q))$.

7. **Savoir utiliser les algorithmes classiques tels que la division euclidienne, l'algorithme d'Euclide, de Horner.**

Chap 19

Polynômes.

Plan du cours

I. Polynômes à une indéterminée. . . . 2
- **1/ Définition d'un polynômes** . . . 2
- **2/ Opérations sur les polynômes** . . . 3
- **3/ Degré et valuation d'un polynôme** . . . 3
- **4/ Substitution et fonction polynôme.** . . . 4

II. Divisions sur $K[X]$ et conséquences. . . . 5
- **1/ Le relation divise.** . . . 5
- **2/ La division euclidienne** . . . 5
- **3/ Comment trouver le reste sans calculer la division euclidienne ?** . . . 6
- **4/ PPCM / PGCD, polynômes premiers entre eux.** . . . 6
- **5/ Algorithme d'Euclide** . . . 7
- **6/ Gauss et Bezout.** . . . 8

III. Le concept de racine. . . . 9
- **1/ Définition et caractérisation.** . . . 9
- **2/ Le théorème fondamental.** . . . 9
- **3/ Dérivation formelle.** . . . 10
- **4/ Caractérisation de l'ordre de multiplicité avec les dérivées.** . . . 11
- **5/ Utilisation de l'analyse pour trouver des racines.** . . . 11
- **6/ Schéma de Horner** . . . 12
- **7/ Introduction aux relations coefficients-racines.** . . . 12

IV. Polynômes irréductibles. . . . 15
- **1/ Définition.** . . . 15
- **2/ Racines et irréductibilité** . . . 16
- **3/ Décomposition en polynômes irréductibles** . . . 16
- **4/ Cas des polynômes à coefficients complexes** . . . 17
- **5/ Cas des polynômes à coefficients réels** . . . 18

V. Quelques polynômes classiques. . . . 21
- **1/ Les polynômes de Tchebitchev.** . . . 21
- **2/ Les polynômes de Lagrange.** . . . 21
- **3/ Les polynômes de Legendre.** . . . 21
- **4/ Les polynômes réciproques ou palindromique.** . . . 21

Chap 19

Polynômes.

Questions de cours

1. Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant respectivement pour coefficients (a_n) et (b_n). Déterminer les coefficients du produit PQ en fonction de (a_n) et (b_n). Montrer à l'aide de cette formule que le polynôme constant 1 est l'élément neutre pour le produit. (I)

2. Donner la définition du degré et de la valuation d'un polynôme. (Vous donnerez en particulier les valeurs de $deg(0)$ et $val(0)$). Puis exprimer $deg(P+Q)$, $val(P+Q)$, $deg(PQ)$ et $val(PQ)$ en fonction de $deg(P)$, $deg(Q)$, $val(P)$ et $val(Q)$ pour P et Q des polynômes. (I)

3. Donner la définition de P divise Q où P et Q sont des polynômes. Est-ce une relation d'ordre ? Quand dit-on que deux polynômes sont associés et comment les reconnait-on ? (II)

4. Expliquer une méthode permettant de déterminer le reste d'une division euclidienne sans la poser. Expérimenter votre méthode pour calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$. (II)

5. Donner la définition d'une racine d'un polynôme P ainsi que son ordre de multiplicité, puis donner (sans preuve) la caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide de la dérivée. Montrer enfin que si λ est racine d'ordre n de P alors λ est racine d'ordre $n-1$ de P', avec n dans $\mathbb{N}^*$ et P dans $\mathbb{R}[X]$. (III)

6. Quelle relation existe-t-il entre le degré d'un polynôme P et le nombre de ses racines. Qu'est qu'un polynôme scindé ? Donner un exemple de polynôme scindé, puis un non scindé. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P nul sur $[0,1]$ et non nul sur $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ (III)

7. Exprimer la somme des racines et le produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. En déduire la somme et le produit des racines n^ième^ d'un nombre complexe a non nul, avec n dans $\mathbb{N}^*$. Puis résoudre, à l'aide des polynômes, le système : (III)
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 14 \end{cases}$$

8. Donner la définition d'un polynôme irréductible puis montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 n'ayant pas de racines est irréductible. Donner un contre-exemple montrant que le résultat est faux pour un degré quelconque. (IV)

9. Donner la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis de $\mathbb{R}[X]$. Expliquer comment décomposer un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. Tester votre méthode que le polynôme $X^8 + 1$. (IV)

10. Donner le théorème de d'Alembert-Gauss. Quels sont les polynômes scindés de $\mathbb{C}[X]$? Expliquer. Montrer que seuls les polynômes constants de $\mathbb{C}[X]$ peuvent être périodiques. (IV)

Chap 19

Polynômes.

Exercices types

Exercice 1 - Une méthode pour calculer la puissance d'une matrice.

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A-2I)^2$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)^2$.
3. En déduire A^n.

Exercice 2 - Polynômes de Tchbitchev.

Considérons la suite de polynômes définis par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $deg(T_n) = n$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant : $\forall \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$
5. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ paire}}}^{n} \binom{\text{n}}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} X^{n-k} (1-X^2)^{\frac{k}{2}}$$

6. Si $n \geq 1$, montrer que $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(X - cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right)$

Exercice 3 - Polynômes de Lagrange

Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts.

1. Soit i fixé. Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à n, nul en tous les a_j, $i \neq j$ et valant 1 en a_i
2. Montrer que ce polynômes est unique, on le note L_i.
3. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme valant λ_i en a_i. Exprimez-le en fonction des L_i.

Chap 19

Polynômes.

Exercices

Voler, c'est quand on a trouvé un objet avant qu'il ne soit perdu.

Coluche.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Soit $P = a_nX^n + \ldots + a_0$ et $Q = b_mX^m + \ldots + b_0$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré respectifs n et m. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. PQ est le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m+n} c_kX^k$ avec $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$.
2. $deg(P+Q) = Sup(deg(P), deg(Q))$
3. $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$
4. Un polynôme est constant si et seulement si $deg(P) = 0$.
5. $K[X]$ est un anneau intègre.
6. S'il existe deux polynômes A et R tel que $P = QA + R$, alors R est le reste de la division euclidienne de P par Q.
7. Le reste de la division euclidienne de $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ par le polynôme $B = (X-1)(X-2)$ est $R = -1$.
8. P/Q signifie qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda.P$.
9. $X^4 + 1$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$.
10. $X^4 - 1$ a 4 racines distinctes sur $\mathbb{C}$.
11. λ est racine d'ordre r de P s'il existe Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)^r.Q$
12. Un polynôme sans racine dans $\mathbb{R}$ est irréductible.
13. Si P est scindé, la somme des ses racines vaut $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$
14. Si P est scindé, le produit des racines de P vaut $-\frac{a_0}{a_n}$
15. Si z est dans $\mathbb{C}$, alors $(X-z)(X-\overline{z})$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$
16. Seuls les polynômes constants vérifient $P(X+1) = P(X)$.
17. $X^{325} + 23X^{172} - 14X^6 + \pi$ admet une racine réelle.
18. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet exactement n racines distinctes.

Niveau 1

Exercice 2.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + aX^2 + bX + c$ par $X^2 + X + 1$.
2. Donner le reste de la division euclidienne de X^{101} par $X^3 - X^2 - X + 1$.
3. Donner le reste de la division de $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$

Exercice 3.

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré impair admet une racine dans $\mathbb{R}$

Exercice 4.

Que dire d'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que sa fonction polynôme associée est périodique ?

Exercice 5.

Soit α et β des nombres complexes. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x.y & = & \alpha \\ x+y & = & \beta \end{array}\right.$

Ⓡ **Exercice 6.**

Que dire des nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant $\lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p = 0$ pour $1 \leq p \leq 3$

Ⓡ **Exercice 7.**

Montrer que si les sommes $\lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p$ pour $1 \leq p \leq 3$ sont réels et si $|\lambda_1| \neq |\lambda_2| \neq |\lambda_3|$ alors λ_1 λ_2 et λ_3 sont réels.

Exercice 8.

Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.

Soit x_1, x_2, x_3, les racines complexes du polynôme $X^3 + pX + q$ de $\mathbb{C}[X]$. Calculer

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \qquad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \qquad \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_3} \qquad (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$$

Exercice 10.

Soient $P = X^n \sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ et $Q = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Montrer que P est un multiple de Q.

Niveau 2

Exercice 11.

Donner une condition sur n pour que $1 + X + X^2$ divise $1 + X^n + X^{2n}$

Exercice 12.

Soit P un polynôme scindable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindable.
2. Montrer que $\lambda P + P'$ est scindable, pour tout λ de $\mathbb{R}$.

Exercice 13.

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ un polynôme unitaire de degré n. montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont inclues dans le disque $D(0, R)$ avec $R = Max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$

Exercice 14.

Soit P un polynôme scindable de $\mathbb{R}[X]$, montrer que $P'^2 - P.P'' \geq 0$ (Indication : considérez la fraction P'/P).

Exercice 15.

Résoudre $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$. Pour cela, on pourra trouver une racine évidente puis pour trouver les autres racines on pourra factoriser par x^2 et faire le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$

® **Exercice 16.**

Trouver u, v et w dans S^1 tels que $\begin{array}{l} u + v + w = 1 \\ u.v.w = 1 \end{array}$

Niveau 3

® **Exercice 17.**

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindables sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Indice : on pourra chercher à montrer que le degré d'un tel polynôme est de degré inférieur à 3 en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 18.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $P = (a_i)$ dans $\mathbb{C}_n[X]$. Le polynôme P est dit réciproque de première espèce (resp. de deuxième espèce) si et seulement si pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on a : $a_k = a_{n-k}$ (resp. $a_k = -a_{n-k}$). On notera $PR_n^+(\mathbb{C})$ (resp. $PR_n^-(\mathbb{C})$) l'ensemble de ces polynômes.

1. Montrer que $X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ est un polynôme et que :

$$\begin{cases} P \in PR_n^+(\mathbb{C}) & \iff \quad X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = P \\ P \in PR_n^-(\mathbb{C}) & \iff \quad X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = -P \end{cases}$$

2. Montrer que si P est dans $PR_n^-(\mathbb{C})$ alors 1 est racine de P.
3. Montrer que si P est dans $PR_n^+(\mathbb{C})$ et que n est impair alors -1 est racine de P.
4. Montrer que si P est dans $PR_n^+(\mathbb{C})$ et que n est pair alors il existe un polynôme Q de degré $\frac{n}{2}$ vérifiant $P = x^{\frac{n}{2}} Q\left(X + \frac{1}{X}\right)$

Exercice 19.

En factorisant $X^5 - 1$ déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. En déduire une construction du pentagone régulier.

Exercice 20.

1. Établir que pour n dans $\mathbb{N}$ et θ dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1}(\theta) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n+1}^{2k} cotan^{2k}\theta$$

2. En déduire les racines réelles du polynômes $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n+1}^{2k} X^k$
3. Calculer alors

$$\sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

4. Vérifier que pour $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a : $\sin(\theta) < \theta < tan(\theta)$.
5. En déduire la formule :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 21.

Soit $\mathcal{H} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \exists A, B \in \mathbb{R}[X], \ P = A^2 + B^2 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est stable par $\times$.
2. Montrer que : $\widetilde{P} > 0 \Longrightarrow P \in \mathcal{H}$

Exercice 22.

1. Calculer $\rho = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$ (Indication : considérer $(X+1)^n - 1$
2. Calculer $\rho(\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\theta + \frac{k\pi}{n})$ (Indication : considérer $(X+1)^n - e^{2in\theta}$

Chap 19

Polynômes.

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 6.**

Que dire des nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant $\lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p = 0$ pour $1 \leq p \leq 3$

- -

$S_1 = S_2 = S_3 = 0$ donc $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, ainsi λ_1, λ_2 et λ_3 sont les racines de X^3.

Ⓡ **Exercice 7.**

Montrer que si les sommes $\lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p$ pour $1 \leq p \leq 3$ sont réels et si $|\lambda_1| \neq |\lambda_2| \neq |\lambda_3|$ alors λ_1 λ_2 et λ_3 sont réels.

- -

S_1 ,S_2 et S_3 réels implique σ_1, σ_2 et σ_3 réels, ainsi λ_1, λ_2 et λ_3 sont les racines de $X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$. Le polynôme est à coefficients réels, donc si z est racine, $\overline{z}$ aussi. Comme $|\lambda_1| \neq |\lambda_2| \neq |\lambda_3|$ alors le conjugué ne peut être que lui-même.

Ⓡ **Exercice 16.**

Trouver u, v et w dans S^1 tels que $\begin{matrix} u+v+w=1 \\ u.v.w=1 \end{matrix}$

- -

Réflexe : on connaît σ_1 et σ_3. Peut-on avoir σ_2 ?

$$\sigma_2 = uv + uw + vw = \frac{1}{w} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \overline{u} + \overline{v} + \overline{w} = \overline{\sigma_1} = 1$$

Donc u, v et w sont les racines de $X^2 - X^2 + X^3 - X^4 = (X-1)(X^2+1)$. Donc $(u, v, w) = (1, i, -i)$ à permutation près.

Ⓡ **Exercice 17.**

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindables sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Indice : on pourra chercher à montrer que le degré d'un tel polynôme est de degré inférieur à 3 en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- -

Soit P un polynôme de degré n scindé à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses n racines réelles. On a alors d'après les relations coefficients-racines :

$$\begin{cases} |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n| & = & 1 \\ |\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n| & = & 1 \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 & = & (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots) \quad = \quad 1 \pm 2 \quad \leq \quad 3 \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, on a :

$$1 \quad = \quad \sqrt[n]{|\lambda_1 \ldots \lambda_n|} \quad \leq \quad \frac{1}{n}\left(|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|\right) \qquad (1)$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs $\overrightarrow{u}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ et $\overrightarrow{v}\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{n}\left(|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|\right)\right)^2 \quad \leq \quad \left(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2\right)\left(\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{3}{n}$$

En utilisant l'équation 1, on trouve $n \leq 3$. Il suffit donc de faire la liste des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 scindé à coefficients dans $\{-1, 1\}$:

Degré 0 : $P = 1$ ou $P = -1$

Degré 1 : $P = X - 1$, $P = X + 1$, $P = -X - 1$ ou $P = -X + 1$.

Degré 2 : On choisit les polynômes avec $\Delta > 0$: $P = X^2 + X - 1$, $P = X^2 - X - 1$, $P = -X^2 + X + 1$ ou $P = -X^2 - X + 1$.

Degré 3 : Remarquons que dans ce cas là, il doit y avoir égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Les $|\lambda_1|$, ..., $|\lambda_n|$ sont donc tous égaux. Le polynôme est donc de la forme $P = \pm(X - \lambda)^2(X + \lambda)$ avec λ valant 1 ou -1. On trouve $P = \pm(X^3 - X^2 - X + 1)$ et $P = \pm(X^3 + X^2 - X - 1)$.

Polynômes.

Devoir maison

Problème - Polynômes de Tchebitchev pour les sinus

1. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ qu'il existe un unique polynôme U_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad sin(nt) \ = \ sin(t) \cdot U_n(\cos t)$$

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1}(X) = 2XU_n(X) - U_{n-1}(X)$.

   c) Déterminer les polynômes U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5.

   d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de U_n.

2. a) Déterminer les racines du polynôme U_n.

   b) En déduire la factorisation de U_n en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.