Chapitre 18

Nombres réels.

Chap 18

Nombres réels.

Et s'il ne fallait retenir que cinq points ?

1. **Savoir déterminer le sup, l'inf, le min et le max d'un sous-ensemble d'un ensemble ordonné.**
   a) Si on arrive à déterminer le max, avec la méthode du point suivant, alors le sup est le max. Sinon, il faut :
      - Conjecturer la valeur M du sup
      - Montrer que M est un majorant
      - Considérer un autre majorant M' et montrer que $M' \geq M$

   b) Si le sup a été déterminé avec la méthode précédente, il suffit de regarder si le sup est dans l'ensemble. Si c'est le cas c'est un max. Si le sup n'a pas été déterminé, on cherche un majorant qui se trouve dans l'ensemble. S'il en existe un, c'est forcément le max.

2. **L'axiome de la borne supérieure.**

Sur $\mathbb{R}$	Tout sous ensemble non vide et	majoré	admet	une borne supérieure
	Tout sous ensemble non vide et	minoré	admet	une borne inférieure
Sur $\mathbb{Z}$	Tout sous ensemble non vide et	majoré	admet	un maximum
	Tout sous ensemble non vide et	minoré	admet	un minimum
Sur $\mathbb{N}$	Tout sous ensemble non vide et	majoré	admet	un maximum
	Tout sous ensemble non vide		admet	un minimum
Sur $\overline{\mathbb{R}}$	Tout sous ensemble		admet	une borne supérieure
	Tout sous ensemble		admet	une borne inférieure

   A noter qu'il n'existe pas de théorème de ce style sur $\mathbb{Q}$.

3. **Autres propriétés de $\mathbb{R}$.**
   a) L'inégalité triangulaire : $\big|\,|a| - |b|\,\big| \;\leq\; |a+b| \;\leq\; |a| + |b|$
   b) Le caractère archimédien de $\mathbb{R}$: $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $na \geq b$
   c) Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Ainsi pour montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un intervalle, on montre qu'il est convexe.
   d) Les propriétés sur la partie entière :
      i. $[x]$ est l'entier qui précède x, donc $[x]$ est le seul entier n vérifiant $n \leq x < n+1$
      ii. $[x+n] = [x]+n$ si n est un entier. A noter que $[x+y] \neq [x]+[y]$; de même $[x\times y] \neq [x]\times[y]$

4. **Densité dans $\mathbb{R}$.**

   a) Bien connaître la définition d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$: A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout intervalle $]x, y[$ de $\mathbb{R}$, il existe a dans $A \cap]x, y[$.

   b) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

   c) Si A est dense dans $\mathbb{R}$ alors tout réel est limite d'une suite de A.

Chap 18

Nombres réels.

Plan du cours

Chap 18

Nombres réels.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'ordre totale, d'une relation d'ordre partielle, ainsi que trois exemples. (I)

2. Soit $(E, \leq)$ un espace ordonné et A une partie de E. Donner la définition de majorant de A, minorant de A, borne supérieure de A, borne inférieure de A, maximum de A et minimum de A. (I)

3. Rappeler l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, ainsi que les propriétés similaires si elles existent sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{R}}$ (I)

4. Rappeler l'inégalité triangulaire ainsi que l'inégalité triangulaire inversée. (II)

5. Donner la définition d'une distance sur un ensemble E. Quelle est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? (II)

6. Rappeler la propriété d'Archimède, puis la définition de la partie entière et fractionnaire d'un nombre réel. (II)

7. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[x+n] = [x] + n$. Est-ce vrai pour n dans $\mathbb{R}$? (II)

8. Rappeler la définition d'un convexe de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire sur les convexes de $\mathbb{R}$? (II)

9. Donner la définition d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, puis donner la caractérisation d'un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$ avec les suites. Nommer 3 sous-ensembles denses de $\mathbb{R}$. (IV)

10. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel. (IV)
    Montrer que le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est nul ou est un irrationnel.
    Montrer que le produit ou la somme de deux irrationnels peut être rationnel ou irrationnel.

Chap 18

Nombres réels.

Exercices types

Exercice 1 - Opérations et bornes supérieures.

Partie I. Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$M = Sup(E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} M \text{ est un majorant} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \ M - \varepsilon < a \leq M \end{cases}$$

2. Énoncer une propriété similaire pour la borne inférieure.

Partie II. Borne supérieure et opérations.
Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On notera

$$A * B = \{a * b \in \mathbb{R} \,/\, (a, b) \in A \times B\}$$

où $*$ peut désigner $+$, $-$, $\times$. De plus on notera :

$$-A = \{-a \in \mathbb{R} \,/\, a \in A\}$$

Montrer que :

1. $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$.
2. $sup(-A) = -inf(A)$.
3. $sup(A - B) = sup(A) - inf(B)$.
4. Si $A \subset \mathbb{R}^+$ et $B \subset \mathbb{R}^+$ alors $sup(A \times B) = sup(A) \times sup(B)$. Que se passe-t-il si A ou B ont une partie négative ?

Exercice 2 - Le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$: l'identité.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non nulle vérifiant pour tout x et y de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \times y) &= f(x) \times f(y) \\ f(1) = 1 & \end{cases}$$

Un telle application est appelée un morphisme de corps de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{Z},\ f(p) = p$.
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ q.f\left(\frac{p}{q}\right) \ = \ f(p)$.
3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
4. Montrer que : $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que f est croissante.
5. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $f = Id$
6. Existe-t-il sur $\mathbb{C}$ d'autres morphismes de corps que l'identité ?

Chap 18

Nombres réels.

Exercices

"Rien n'est plus semblable à l'identique
que ce qui est pareil à la même chose.

P. Dac.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet une borne inférieure.
2. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ admet une borne supérieure.
3. $Ent(-4,8) = -4$
4. Soit x dans $\mathbb{R}$, alors $x \leq Ent(x) < x+1$
5. Soient f et g des applications bornées de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors :
$$\underset{x\in I}{Sup}\ [f(x)+g(x)] \ = \ \underset{x\in I}{Sup}\, f(x) \ + \ \underset{x\in I}{Sup}\, g(x)$$
6. Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
7. L'intervalle $]1,2]$ n'a pas de plus petit élément.
8. $\forall x,y \in \mathbb{R},\ E(x)+E(y) \ = \ E(x+y)$
9. $\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ \ x \leq y \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$
10. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
11. $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif.
12. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.
13. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = Max\{-x,x\}$
14. La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
15. La somme d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.
16. Le produit d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.

Niveau 1

Exercice 2.

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Les parties de suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles minorées, majorés ? Existe-t-il une borne supérieure ? inférieure ? un max ? un Min ?

1. $\{a + bn \,/\, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a + b(-1)^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + \frac{b}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $\{(-1)^n a + \frac{b}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $\{a + \frac{b(-1)^n}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 3.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $Sup(A) > 0$. Montrer que A contient un élément strictement positif.

Exercice 4.

Soit f une application de A dans $\mathbb{R}$. On note $Sup(f)$, $Inf(f)$, $Min(f)$, $Max(f)$ les valeurs si elles existent de $Sup(f(A))$, $Inf(f(A))$, $Min(f(A))$, $Max(f(A))$. De même f est dite majorée, minorée, bornée si et seulement si $f(A)$ l'est.

1. Montrer que la fonction de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
est bornée. Déterminer $Sup(f)$ et $Inf(f)$.
2. Déterminer, s'ils existent, $Max(f)$ et $Min(f)$

Exercice 5.

Déterminer les périodes de la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 6.

Montrer que :

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{|a-b|} \geq \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right|$

Exercice 7.

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leq b$.

1. Montrer que $sup(A)$ et $inf(B)$ existe et que $sup(A) \leq inf(B)$.
2. Si de plus, $A \cup B = \mathbb{R}$, montrer que $sup(A) = inf(B)$

Niveau 2

Exercice 8.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non majoré et non minoré vérifiant $\forall x, y \in E$, $\dfrac{x+y}{2} \in E$. Montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$

Exercice 10.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right]$$

Exercice 11.

Soit f et g des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ égales sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left[\sqrt{k}\right]$.

Niveau 3

Exercice 13.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx]$

Exercice 14.

Montrer que pour tout a_i et b_i de $\mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Exercice 15.

Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui conservent la distance usuelle de $\mathbb{R}$ (C'est-à-dire que la distance entre deux points est la même que la distance entre les images de ces points).

Exercice 16.

Soit f et g des applications bornées de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\underset{x\in I}{Sup}|f(x)|$ existe. On note cette borne supérieure $\|f\|_\infty$.
2. Montrer que : $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
3. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda.f\|_\infty \ = \ |\lambda|\|f\|_\infty$.

Exercice 17.

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et A, B des points de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que si $\overrightarrow{u}(x_1, \ldots, x_n)$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

1. Montrer que $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$
2. Montrer que $\{d(A,M)\ /\ M \in E\}$ a une borne inférieure notée $d(A,E)$.
3. Montrer que $d(A,E) \leq d(A,B) + d(B,E)$
4. En déduire que $|d(A,E) - d(B,E| \leq d(A,B)$.
5. On se place à présent dans le cas où $n = 1$. Les points sont donc des réels. Déterminer $d(x,E)$ selon les valeurs de x pour $E = [a,b]$, $E =]a,b[$, $E = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Q}$.

Ⓡ Exercice 18.

On se propose de montrer dans cet exercice que toute application croissante f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Considérons donc une application **croissante** f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et le sous-ensemble E de $[0,1]$ défini par :

$$E = \{x \in [0,1]\ /\ x \leq f(x)\}$$

1. Montrer que E admet un borne supérieure que l'on notera par M.
2. Montrer que $f(M)$ est un majorant de E.
3. En déduire que M appartient à E.
4. Montrer que $f(M)$ est également dans E
5. Conclure que $f(M) = M$
6. Montrer que ce théorème est faux si on remplace "croissante" par "décroissante".

Nombres réels.

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 18.**

On se propose de montrer dans cet exercice que toute application croissante f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x)=x$.

Considérons donc une application **croissante** f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et le sous-ensemble E de $[0,1]$ défini par :

$$E=\{x\in[0,1]\ /\ x\leq f(x)\}$$

1. Montrer que E admet un borne supérieure que l'on notera par M.
2. Montrer que $f(M)$ est un majorant de E.
3. En déduire que M appartient à E.
4. Montrer que $f(M)$ est également dans E
5. Conclure que $f(M)=M$
6. Montrer que ce théorème est faux si on remplace "croissante" par "décroissante".

- -

1. L'ensemble E est non vide car il contient par exemple 0 puisque $f(0)$ est dans $[0,1]$ et est majoré par 1. Il admet donc une borne supérieure.

2. M étant un majorant de E, on a pour tout x de E : $x\leq M$. Comme f est croissante, on obtient : $\forall x\in[0,1],\ f(x)\leq f(M)$. Enfin si x est dans E alors $x\leq f(x)$. Ainsi $\forall x\in E,\ x\leq f(M)$.

3. Comme M est le plus petit des majorants de E et comme $f(M)$ est un majorant de E, on a $M\leq f(M)$ et donc M est dans E.

4. On a $M\leq f(M)$ d'après la question précédente. Comme f est croissante, on en déduit que $f(M)\leq f(f(M))$ et donc que $f(M)$ est dans E.

5. Comme $f(M)$ est dans E et que M est la borne supérieures de E, on peut conclure que $f(M)\leq M$. Comme l'inégalité inverse $M\leq f(M)$ a déjà été prouvé, on en déduit que $f(M)=M$.

6. Il suffit de considérer la fonction $f(x)=1$ sur $[0,1/2]$ et $f(x)=0$ sur $]1/2,1]$.

Chap 18

Nombres réels.

Devoir maison

Problème - Non existence de l'axiome de la borne supérieur dans $\mathbb{Q}$

Cet exercice va permettre de montrer que l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ n'existe pas. Considérons l'ensemble :

$$A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \ / \ r^2 \leq 2 \right\}$$

On veut montrer que A est non vide, majoré et pourtant ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que A est non vide et possède un majorant dans $\mathbb{Q}$ (Attention, le majorant doit être dans $\mathbb{Q}$ et pas dans $\mathbb{R}$).
2. Supposons que A admette une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ que l'on notera notons s ($s \in \mathbb{Q}$). Montrer que $s^2 \neq 2$.
3. On suppose $s^2 < 2$. Montrer que s n'est pas un majorant de A.
4. Soit B un sous ensemble quelconque de $\mathbb{R}$, montrer que :

$$M = Sup(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } B \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in B, \ M - \varepsilon < a \leq M \end{cases}$$

5. En déduire que si $s^2 > 2$ alors s ne peut être la borne supérieure.
6. Conclure