Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie.

1 Points importants
2 Plan du cours
3 Questions de cours
4 Exercices types
5 Exercices
6 Exercices corrigés
7 Devoir maison

Chap 17

Espaces vectoriels de dimension finie.

Et s'il ne fallait retenir que douze points ?

1. **Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.** Ainsi si u est application linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base, connaître $u(e_1)$, $\ldots$, $u(e_n)$ nous permet de déterminer l'image de n'importe quel élément puisque si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$est une décomposition de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ alors :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$$

De plus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille de F, alors il existe une unique application linéaire u vérifiant $u(e_i) = f_i$

2. **Théorème de la base incomplète/extraite.**
   - Toute famille libre peut être complétée en une base (Les vecteurs ajoutés peuvent être pris (si on veut) dans les vecteurs qui forment une autre base).
   - De toute famille génératrice, on peut en extraire une base.

3. **Toutes les bases d'un espace vectoriel présentent le même nombre de vecteurs.** Ainsi s'il existe au moins une base, l'espace vectoriel est dit de dimension finie et la dimension est le nombre de vecteurs que présentent les bases. Donc, une bonne méthode pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel est de trouver une base et de compter le nombre de vecteurs qu'elle présente. Pour savoir si l'espace vectoriel est de dimension infinie le plus simple est de trouver une famille libre $(f_1, \ldots, f_n)$ pour chaque n de $\mathbb{N}$

4. **Dans une espace vectoriel de dimension n, les familles libres ont n ou moins vecteurs et les familles génératrices ont n ou plus vecteurs.** De plus les familles libres (resp. génératrice) qui ont exactement n vecteurs sont des bases.

5. **Les dimensions classiques.**
   - $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$
   - $dim(E+F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$. En particulier : $dim(E \oplus F) = dim(E) + dim(F)$
   - $dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$. En particulier $dim(E^*) = dime(E)$.
   - $dim_k(k^n) = n$
   - $dim_k(k_n[X]) = n + 1$
   - $dim_k(\mathcal{M}_{pq}(k)) = p.q$

6. **Dimension d'un sous-espace vectoriel.** Deux propriétés principales sur les sous-espaces vectoriels : si E et F sont des espace vectoriel alors :

$$F \subset E \Longrightarrow dim(F) \leq dim(E) \qquad\qquad \begin{cases} dim(F) = dim(E) \\ F \subset E \end{cases} \Longrightarrow F = E$$

7. **Savoir trouver la matrice associée à une famille de vecteurs.** Il suffit de "coller" les coordonnées des vecteurs pour en faire une matrice. La encore, changer de base c'est changer de matrice.
8. **Savoir trouver la matrice d'une application linéaire.** On rappelle le procédé : soit u dans $\mathcal{L}(E,F)$, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $(f_1,\ldots,f_p)$ une base de F. Les colonnes de la matrices sont alors formées des coordonnées des vecteurs $u(e_1),\ldots,u(e_n)$ dans la base $(f_1,\ldots,f_p)$. On peut le représenter ainsi :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & \ldots & u(e_n) \end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} & & & \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right] & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix} \end{array}$$

   Bien se rendre compte qu'en changeant de bases, on change de matrice. De plus, si f est un endomorphisme, on prend la plupart du temps la **même** base pour l'espace de départ et pour l'espace d'arrivée.

9. **Le rang d'un endomorphisme.** Par définition si u est une application linéaire de E dans F alors le rang de u est donné par : $rg(u) = dim(Im(u))$. Se souvenir aussi que :
   a) Le rang ne change pas quand on compose u par un isomorphisme à gauche ou à droite.
   b) Le rang de u est égale au rang de l'une de ses matrices associées quelles qu'elles soient.
   c) u est surjective si et seulement si $rg(u) = dim(F)$.
   d) u est injective si et seulement si $rg(u) = dim(E)$.

10. **Le théorème du rang.** Soit u une application linéaire de E dans F alors :

$$dim(E) = dim(ker(u)) + dim(Im(u))$$

   On peut en déduire :

$$\begin{cases} dim(E) = dim(F) \\ u \in \mathcal{L}(E,F) \end{cases} \Longrightarrow \quad (\ f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \Longleftrightarrow f \text{ bijective}\ )$$

11. **Connaître les propriétés de $[\ ]_{\beta\beta'}$.** Après avoir fixé une base dans l'espace de départ et une dans l'espace d'arrivée, on a (avec des notations pour f, g, λ, μ, x classiques)
   a) A chaque application linéaire f, on associe une unique matrice [f].
   b) Chaque matrice provient d'une unique application linéaire.
   c) $\lambda[f] + \mu[g] = [\lambda f + \mu g]$

d) $[f] \times [g] = [f \, o \, g]$

e) $[f(x)] = [f] \times [x]$

f) f est inversible si et seulement si $[f]$ est inversible et $[f^{-1}] = [f]^{-1}$.

12. **Les formules de changement de base.** Soient E et F des espaces vectoriels, P la matrice de passage de la base β de E à la base β' de E et Q la matrice de passage de la base γ de F à la base γ' de F. Notons également X et X' les coordonnées d'un vecteurs de E dans les bases β et β'. Notons enfin A (resp. A') la matrice d'une application linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$ dans les bases β, γ (resp. β', γ'). Alors :

    a) $X' = P^{-1}X$

    b) $A' = Q^{-1}AP$

    c) Cas particulier important : si $E = F$ (ainsi f est un endomorphisme), $\beta = \gamma$ et $\beta' = \gamma'$, on a : $A' = P^{-1}AP$

Chap 17

Espaces vectoriels de dimension finie.

Plan du cours

I. Familles dans un espaces vectoriel de dimension finie. 2
- **1/ Espaces vectoriels de type fini vs de dimension finie.** 2
- **2/ Le pont vers k^n.** 3
- **3/ Propriétés des familles.** 3
- **4/ Dimension d'un sev** 4
- **5/ Théorème de la base incomplète/extraite.** 5
- **6/ Classification des espaces vectoriels de DF** 6

II. Matrices associées à une famille de vecteurs, à une application linéaire. 7
- **1/ Comment associer une matrice à une famille de vecteurs ?** 7
- **2/ Rang d'une famille de vecteurs.** 7
- **3/ Comment montrer qu'une famille est libre ou génératrice ?** 7
- **4/ Comment associer une matrice à une application linéaire ?** 7
- **5/ Comment associer une matrice à un endomorphisme ?** 8
- **6/ Rang d'une application linéaire.** 8
- **7/ Comment montrer qu'une application linéaire est injective ou surjective ?** 8

III. Calculs de dimension 8
- **1/ Recollement de bases, dimension d'une somme** 8
- **2/ Dimension d'un produit** 9
- **3/ Dimension et applications linéaires.** 9
- **4/ Dimension de $L(E, F)$** 10
- **5/ Le théorème du rang.** 11

IV. Changement de bases. 11
- **1/ Matrice de passage** 12
- **2/ Changement de base pour les vecteurs** 12
- **3/ Changement de base les applications linéaires** 12
- **4/ Changement de base les endomorphismes** 13
- **5/ Exemples de choix de bases pour avoir une matrice simple.** 14
- **6/ Matrices semblables, matrices équivalentes.** 14
- **7/ Invariant par changement de bases.** 14

V. Application à l'étude des suites récurrentes 14
- **1/ Problème général** 14
- **2/ La méthode** 14
- **3/ En pratique** 16

Chap 17

Espaces vectoriels de dimension finie.

Questions de cours

1. Donner les dimensions et une base des espaces vectoriels suivants : $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X])$, $dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R}))$. (I)

2. Énoncer les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite. Montrer qu'en dimension finie tout espace vectoriel admet un supplémentaire. (I)

3. Citer quatre espaces vectoriels : deux de dimension finie et deux de dimension infinie. (I)

4. Énoncer l'égalité de Grassman donnant la dimension de $E+F$, puis montrer que s'il existe deux hyperplans de E qui sont en somme directe alors $dim(E) \leq 2$. (I)

5. Montrer que tout k espace vectoriel de dimension n est isomorphe à k^n. (I)

6. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille quelconque de F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire vérifiant : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ f(e_i) = u_i$. En d'autres termes, montrer qu'une application linéaire f est entièrement déterminée par les valeurs prises par f sur une base. (I)

7. Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice $p = dim(E)$ (cad $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$). Montrer qu'il existe x dans E tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est une base de E. (II)

8. Rappeler comment montrer qu'une famille est libre/génératrice avec le rang puis rappeler comment montrer qu'une application linéaire est injective/surjective avec le rang. (II)

9. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs et la définition du rang d'une application linéaire. Donner le rapport qu'il existe entre les deux. (II)

10. Énoncer le théorème du rang puis montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P + P'$ est bijectif. (III)

11. Donner (sans preuve) une base de $E \times F$ (resp. $E \oplus F$) en fonction d'une base de E et d'une base de F. En déduire la dimension de $E \times F$ (resp. $E \oplus F$). (III)

12. Rappeler la formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes. (IV)

13. Soit $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_0 = F_1 = 1$, la suite de Fibonacci. Exprimer F_n en fonction de n. (V)

Chap 17

Espaces vectoriels de dimension finie.

Exercices types

Exercice 1 - Une application linéaire classique.

On note Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est une application linéaire.
2. Montrer qu'une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ périodique est constante. En déduire le noyau de Δ.
3. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P
4. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ à la source et $\mathbb{R}_n[X]$ au but. Montrer que Δ_n est surjective pour tout n de $\mathbb{N}$.
5. Montrer que Δ est surjective.

Exercice 2 - Des changements de bases.

Soit $\beta_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On pose $\beta_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ avec $\varepsilon_1 = e_1 - e_2 + e_4$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_3 = e_2 - e_4$ et $\varepsilon_4 = e_2 - e_3 + 2e_4$.

1. Montrer que β_2 est une base de E.
2. Préciser la matrice de changement de base de β vers β' et celle de β' vers β.
3. Soit f l'endomorphisme de E tel que :
$$[f]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4/3 & -1 & -4/3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
Calculer $[f]_{\beta_2}$, $[f]_{\beta_1,\beta_2}$, $[f]_{\beta_2,\beta_1}$.
4. Quels sont les rapports entre ces matrices du point de vue de $\mathcal{E}_q$ et de $\sim$?

Exercice 3 - Indice de Fitting

Soit E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $K_n = Ker(f^n)$ et $I_n = Im(f^n)$.

1. Montrer que la suite (K_n) est croissante (pour l'inclusion), et que (I_n) est décroissante.
2. Supposons désormais que la dimension de E est fini. Montrer que ces suites, à partir d'un certain rang, stationnent exactement au même indice n_0, l'indice de Fitting. On a :
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} \{0\} & \subsetneq & K_0 & \subsetneq & K_1 & \subsetneq & \dots & \subsetneq & K_{n_0} & = & K_{n_0+1} & = & \dots \\ E & \supsetneq & I_0 & \supsetneq & I_1 & \supsetneq & \dots & \supsetneq & I_{n_0} & = & I_{n_0+1} & = & \dots \end{array} \right.$$
3. $f|_{K_{n_0}}$ est nilpotent et $f|_{I_{n_0}}$ est un automorphisme.
4. On a alors $E = Ker(f^{n_0}) \oplus Im(f^{n_0})$.
5. Quels sont les indices de Fitting dans le cas d'une symétrie et d'une projection ?

Chap 17 **Espaces vectoriels de dimension finie.**

Exercices

Quand on lui marche sur les pieds,
le serpent hausse les épaules.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Soient E et F des k-espace vectoriels de dimension finie. Notons β et β' des bases respectives de E, F et u une application linéaire de E vers F et A la matrice associée à u dans les bases β et β'. Considérons de plus M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. La somme de deux automorphismes de E est encore un automorphisme.
2. L'intersection de deux sev de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3 est non réduit à 0.
3. u est injective si et seulement si $Ker(u) = \emptyset$.
4. u est surjective si et seulement si $Im(u) = u(E)$.
5. Toute famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré deux à deux distincts est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Une famille libre présente moins ou autant de vecteurs qu'une famille génératrice.
7. $rg(f) = dim(E) - dim(Ker(f))$
8. Si E et F sont de DF alors f est injective si et seulement si f est surjective.
9. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E par l'adjonction de vecteurs convenables de E.
10. Soit P_1 et P_2 deux sev de dimension 2 de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, alors si la dimension de E est fini alors $dim(E) \geq 4$.
11. Soit E et F de ev de dimension finie alors $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$
12. $rang(A) = rang(u)$.
13. $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ avec $p = dim(E)$ et $q = dim(F)$.
14. I est la matrice de Id dans un couple quelconque de base.
15. Pour trouver $Ker(u)$, on résout $A.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$
16. Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace et même rang.

Niveau 1

Exercice 2.

Soit E un k espace vectoriel et F un sev de E. Considérons de plus u injective dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $u(F) \subset F$

1. Montrer que si F est de dimension finie alors $F = u(F)$
2. Donner un contre-exemple si on ne suppose plus F de dimension finie.

Exercice 3.

Soit E un k espace vectoriel. Déterminer un endomorphisme injective non surjective et un surjective non injectif. Est-ce possible de choisir E de dimension finie ?

Exercice 4.

Donner (u_n) en fonction de n où (u_n) est la suite définie par $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$ et $u_0 = u_1 = 1$

Exercice 5.

Montrer que les endomorphismes de rang 1 sont de la forme $\phi_{l,a} \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & l(x)a \end{array}$ où $l \in E^*$ et $a \in E$

Exercice 6.

Soit n dans $\mathbb{N}$ et a dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $\big(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\big)$ est libre puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Donner les coordonnées de X^p dans cette base pour tout p de $\{1, \dots, n\}$
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P en fonction de ses dérivées successives en a : $P^{(k)}(a)$.

Exercice 7.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que f appartient à $Gl(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $(x', y', z') = f(x, y, z)$ pour chaque triplet (x, y, z).
3. Exprimer (x, y, z) en fonction de (x', y', z'). En déduire A^{-1}.

Exercice 8.

Donner (F_n) en fonction de n où (F_n) est la suite de Fibonacci : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$

Exercice 9.

Montrer que $\left\{ \begin{bmatrix} a+c & a+b+c & c \\ b-a & c-2b & a \\ c & a+2c & b \end{bmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sev de $M_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 10.

On suppose que $f \, o \, g = 0$ et $f + g \in Gl(E)$, alors $rg(f) + rg(g) = n$

Exercice 11.

Soit f une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par f. On note encore f la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Préciser les matrices de f dans les bases $\beta = (1, X, X^2)$ et $\beta' = (1, X-1, (X+1)^2)$.
3. Vérifier la formule de changement de base.

Exercice 12.

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme canoniquement associé.

Niveau 2

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Montrer que $rg(f^3) = rg(f^4)$. Généraliser.

Exercice 14.

Soient u et v des endomorphismes d'un k espace vectoriel de dimension finie vérifiant $uov = u^2 + 2u - Id$. Montrer que u et v commutent.

Exercice 15.

Soit E un k espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que le noyau d'une forme linéaire non nulle de E est un hyperplan
2. Montrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
3. Montrer que si deux formes linéaires non nulles de E ont le même hyperplan pour noyau alors elles sont proportionnelles.

Exercice 16.

Soient E un k espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E,\ \exists n_x \in \mathbb{N},\ f^{n_x}(x) = 0$$

Montrer que f est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe n tel que $f^n = 0$.

Exercice 17.

Donner des familles bases de $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de ces espaces vectoriels.

Ⓡ Exercice 18.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

Notons $\beta' = (e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_1 - e_2)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de f dans la base β, la matrice de changement de base de la base β vers la base β', puis la matrice de f dans la base β'.

Exercice 19.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de :

1. la symétrie et la projection par rapport au plan $z = 0$ et de direction $\mathbb{R}.(0, 0, 1)$.
2. la symétrie et la projection par rapport au plan $x = y$ et de direction $\mathbb{R}.(1, -1, 0)$.
3. la symétrie et la projection par rapport au plan $x + y + z = 0$ et de direction la droite d'équation $x = y/2 = z/3$.

Exercice 20.

Soit C l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que C est une $\mathbb{R}$-algèbre (resp. un corps), isomorphe à $\mathbb{C}$, la $\mathbb{R}$-algèbre (resp. le corps) des nombres complexes.
2. Quelle norme $\|\ \|$ faut-il mettre sur C pour que l'isomorphisme précédent soit une isométrie de $(C, \|\ \|)$ dans $(\mathbb{C}, |\ |)$?

Exercice 21.

Soient E et F des espaces vectoriels. Montrer que $E^* \times F^*$ et $(F \times G)^*$ sont isomorphes.

Exercice 22.

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un corps, pour les opérations induites de $M_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbb{H}$ n'est pas commutatif.
3. Est-ce que $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$?
4. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ s'identifient à des sous-corps de $\mathbb{H}$.
5. En s'inspirant de l'identification de $\mathbb{C}$ précédente, déterminer une loi externe de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{H}$, qui fasse de $\mathbb{H}$ une $\mathbb{C}$-algèbre.
6. Déterminer la base canonique de $\mathbb{H}$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbre, puis en tant que $\mathbb{R}$-algèbre. Déterminer leur "table de multiplication".
7. Vérifier que le polynôme $X^2 + 1$ a une infinité de racines.
8. Montrer que le centre de $\mathbb{H}$ est l'ensemble des réels.

Exercice 23.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme vérifiant :

$$\begin{cases} f(e_1) = \frac{5}{6}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_2) = -\frac{1}{6}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_3) = -\frac{1}{6}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur. Déterminer le noyau et l'image de f.

Niveau 3

Exercice 24.

Soit E un k-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. On suppose que $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f et qu'il n'existe pas de polynôme non nul de degré strictement inférieur à 3 qui soit annulateur de f (On dit que $X^3 + X$ est le polynôme minimal de f).

1. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$
2. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Ker(f^2 + I)$
3. Montrer que f laisse stable $Ker(f^2 + I)$.
4. Montrer qu'il existe x dans E tel que $(x, f(x))$ soit une base de $Ker(f^2 + I)$
5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25.

Soit E un K-ev de dimension n et $f,\, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{cases} rg(f) + rg(g) - n \leq rg(f\ o\ g) \leq Min(rg(f), rg(g)) \\ |rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g) \end{cases}$$

Exercice 26.

Montrer de deux façons différentes que le centre de $M_n(k)$ est formé des homothéties.

Chap 17 **Espaces vectoriels de dimension finie.**

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 18.**

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

Notons $\beta' = (e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_1 - e_2)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de f dans la base β, la matrice de changement de base de la base β vers la base β', puis la matrice de f dans la base β'.

- -

$[f]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ainsi :

$$A' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On aurait pu trouver directement la matrice en calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$:

$$\begin{cases} f(e'_1) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 = e'_1 - e'_2 \\ f(e'_2) = f(e_1) - f(e_2) = 2(e_1 - e_2) = 2e'_2 \end{cases}$$

Chap 17 **Espaces vectoriels de dimension finie.**

Devoir maison

Problème - Méthode pour les EDL_2^{cc}.

Soit k le corps désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le but du problème est de retrouver les solutions de l'équation différentielle en y :

$$a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = f(x) \qquad (E)$$

où a, b, c sont dans k et f est une application de $\mathbb{R}$ dans k. On notera S l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans k solutions de (E). L'équation homogène associée à (E) est l'équation différentielle :

$$a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = 0 \qquad (EH)$$

On notera S_H l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans k solutions de l'équation homogène. De plus, l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (EC)$$

sera appelée l'équation caractéristique. On notera Δ le discriminent de (EC) et r_1 et r_2 les racines éventuellement confondues sur $\mathbb{C}$ de cette équation. Enfin, on rappelle le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles de type (E). Il pourra être utilisé sans démonstration : Pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(x) = y$ et $f'(x) = z$.

Partie I. Relations entre S et S_H et structure. Soit y_p une solution particulière de (E).

1. Montrer que pour tout élément y de (EH), l'application $y + y_p$ est solution de (E).
2. Inversement, montrer que pour tout élément y de (E), l'application $y - y_p$ est solution de (EH).
3. Montrer que S_H est un k-espace vectoriel.
4. Montrer que $\begin{array}{cccc} \phi & S_H & \to & k^2 \\ & y & \mapsto & (y'(0),\, y(0)) \end{array}$ est une application linéaire.
5. Montrer que ϕ est un isomorphisme. En déduire $dim_k(S_H)$.
6. Est-ce que S est un k-espace vectoriel en général ?

Partie II. Résolution si $k = \mathbb{C}$. On suppose dans cette partie que a, b et c sont dans $\mathbb{C}$.

1. Pour tout s de $\mathbb{C}$, notons g_s l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_s(x) = e^{s.x}$. Déterminer les valeurs de s pour lesquelles g_s est solution de (EH).
2. Soient s et t des complexes tels que $e^s \neq e^t$. Montrer que la famille (g_s, g_t) est libre.
3. En déduire les solutions de (EH) dans le cas où $\Delta \neq 0$.
4. Montrer que si $\Delta = 0$ alors l'application $h(x) = x.g_{r_1}(x)$ est solution de (EH).
5. Montrer que si $\Delta = 0$ alors la famille (g_{r_1}, h) est libre.
6. En déduire les solutions de (EH) dans le cas où $\Delta = 0$.

Partie III. Résolution si $k = \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie que a, b et c sont dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les solutions de (EH) dans le cas où $\Delta > 0$ sont de la forme $y(x) = Ae^{r_1 . x} + Be^{r_2 x}$ avec A et B dans $\mathbb{R}$. On prendra un soin particulier à montrer que A et B sont réels.
2. Déterminer les solutions de (EH) dans le cas où $\Delta = 0$.
3. Supposons à présent que $\Delta < 0$. On pose $r_1 = u + iv$ avec u et v dans $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que les solutions peuvent se mettre sous la forme $y(x) = e^{ux}(Ae^{ivx} + \overline{A}e^{-ivx})$
   b) En déduire les solutions de (EC) dans le cas où $\Delta < 0$.