# Chapitre 16

# Suites réelles ou complexes

Chap 16

# Suites réelles ou complexes

*Et s'il ne fallait retenir que cinq points ?*

1. **Savoir montrer qu'une suite est convergente, et savoir déterminer sa limite.**

   a) Méthodes donnant uniquement la convergence.
   - Théorème des limites monotones : La suite est croissante et majorée, décroissante et minorée ou monotone et bornée, alors la suite est convergente (Ex : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$).
   - Si on sait qu'elle est adjacente à une autre, alors elle est convergente (Ex : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$).
   - Si on a une idée de la limite, on peut utiliser la définition (Ex : $u_n = 1/n$).

   b) Méthodes donnant uniquement la limite.
   - Si la suite est définie par récurrence et que l'on sait qu'elle converge, alors on passe à la limite dans l'équation de récurrence, ce qui donne souvent une équation en la limite qu'il faut résoudre (C'est la méthode utilisée pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$)
   - Si $(u_n)$ est une suite d'entiers convergente alors $(u_n)$ stationne. Sa limite est alors égale à la valeur que prend la suite lorsqu'elle stationne (Ex : $u_n = Ent(10/(n+1))$)

   c) Méthodes donnant la convergence et la limite.
   - La méthode la plus facile consiste à utiliser les opérations algébriques sur les limites. Si la suite est le produit, la somme, une combinaison linaire... de suites dont on connaît la limite, il suffit de faire la somme, le produit, la combinaison linéaire des limites. Cette méthode devient inefficace lorsque que l'on obtient des formes indéterminées.
   - Théorème d'encadrement : si la suite $(u_n)$ est comprise (au moins à partir d'un certain rang) entre deux suites convergentes ayant la même limite $l$, alors la suite $(u_n)$ est convergente et sa limite est $l$ (Ex : $u_n = \frac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{n!}$)
   - Si la suite est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, alors elle converge vers 0. C'est une conséquence du théorème d'encadrement (Ex : $u_n = Ent(na)/na$)
   - Plus généralement, si la suite $(u_n)$ est équivalente à une suite $(v_n)$ convergente, alors $(u_n)$ est convergente et sa limite est la même que celle de $(v_n)$. En particulier, si la suite est équivalente à un réel $l$ (sous-entendu à la suite constante égale à $l$), alors la suite est convergente et sa limite est $l$.

2. **Savoir montrer qu'une suite est majorée, minorée bornée.**

   a) Si la suite est convergente alors elle est bornée.

   b) Si la suite est définie par récurrence, pensez à essayer de le montrer par récurrence.

   c) Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, penser à étudier la fonction $f$. Si $f$ est bornée, il en est de même pour $u_n$.

3. **Comment montrer qu'une suite est monotone.** Pour cela plusieurs possibilités :

   a) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si c'est positif pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la suite est croissante ; si c'est négatif, la suite est décroissante ; si le signe dépend de $n$, la suite est ni croissante ni décroissante.

b) Si la suite est à termes positifs, on peut étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Si c'est plus grand que 1 pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la suite est croissante ; si c'est plus petit que 1, la suite est décroissante ; si la position par rapport à 1 dépend de $n$, la suite est ni croissante ni décroissante.

c) Si la suite est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, on trouve un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ tels que :

- $u_n$ est dans $I$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$,
- la fonction $f$ est croissante sur $I$,

La suite est alors monotone. Remarquons que le théorème ne dit pas si la suite est croissante ou décroissante. Cependant, si les termes $u_0$ et $u_1$ peuvent être calculés, en comparant ces valeurs, on peut déduire si la suite est croissante ou décroissante.

4. **Savoir trouver l'équivalent d'une expression.** Pour cela, il faut retenir plusieurs points :

a) L'équivalent d'un produit est le produit des équivalents

b) L'équivalent d'une somme n'est en général **pas** la somme des équivalents. Si l'on cherche l'équivalent de $u_n + v_n$, on peut :
- regarder si $u_n = o(v_n)$ (ou $v_n = o(u_n)$). Dans ce cas $u_n + v_n \sim v_n$.
- regarder si $u_n \sim a.v_n$ avec $a \neq -1$. Dans ce cas $u_n + v_n \sim (1+a)v_n$.
- revenir aux définitions avec les $\varepsilon$. Cette méthode étant la plus efficace, puisqu'elle généralise les deux précédentes.

c) On ne peut pas appliquer une fonction quelconque aux deux membres d'une équivalence (i.e. si $u_n \sim v_n$ cela n'entraîne pas (toujours) que $h(u_n) \sim h(v_n)$). Cependant on a quelques résultats :

a) $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout $\alpha$ de $\mathbb{R}$.

b) $u_n \sim v_n$ et $\underset{n\to+\infty}{lim}\ u_n = 0$ ou $+\infty \Longrightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$

c) $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$

les expressions précédentes sont vraies uniquement si elles ont un sens. Ainsi, par exemple, la deuxième n'est vraie que si les fonctions considérées sont strictement positives.

5. **Savoir comparer les suites de référence.** On a pour $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $a$ dans $]1;+\infty[$ :

$$ln(n)^\beta \ << \ n^\alpha \ << \ a^n \ << \ n! \ << \ n^n$$

Ainsi, si on trouve une forme indéterminée, l'exponentielle $(a^n)$ l'emporte sur la puissance $(n^\beta)$ qui l'emporte sur $ln$.

Chap 16

# Suites réelles ou complexes

*Plan du cours*

Chap 16

# Suites réelles ou complexes

*Questions de cours*

1. Donner la définition d'une suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, puis montrer qu'une suite réelle est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée. (I)

2. Soit $(u_n)$ une suite réelle. Donner les définitions de : (II)

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l^+ \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l^- \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

puis montrer avec la définition que la suite $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

3. Énoncer les théorèmes d'encadrement pour une limite finie ou infinie. Illustrez-le en déterminant la limite de $u_n = \frac{[na]}{na}$ avec $a$ réel non nul. (II)

4. Rappeler les 4 énoncés du théorème des limites monotones, puis montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = 0$ est convergente. (II)

5. Que peut-on dire d'une suite convergente d'entiers ? En déduire que la suite $(u_n)$ des décimales de $\sqrt{2}$ n'est pas convergente. (II)

6. Énoncer le théorème des croissances comparées pour les suites. (IV)

7. Montrer que la suite $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ est convergente. Quelle est sa limite ? (IV)

9. Soit $f$ une application continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (V)
    1. Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone.
    2. Donner un exemple où $f$ est croissante et $(u_n)$ est décroissante.
    3. Montrer que si $(u_n)$ est convergente alors sa limite $l$ vérifie $f(l) = l$.

10. Donner la définition formelle d'une suite extraite, puis rappeler comment montrer qu'une suite est divergente avec les suites extraites. Illustrer votre méthiode en montrant que la suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente (V)

Chap 16

# Suites réelles ou complexes

*Exercices types*

## Exercice 1 - Séries de références.

On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ .

1. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq H_n$. En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $S_n \leq 1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$. En déduire que $(S_n)$ est convergente.
3. En encadrant l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 et $n$, montrer que pour tout $n$n de $\mathbb{N}$, on a
$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$$
En déduire un équivalent de $H_n$.

## Exercice 2 - Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Notons $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0$ fixé dans $]-2;+\infty[$.

1. Résoudre $f(x) \leq x$ et $f(x) = x$. Si $(u_n)$ converge, quelle est sa limite ?
2. Déterminer suivant les valeurs de $u_0$ la monotonie de $(u_n)$.
3. Montrer que 2 est un majorant si $u_0 \leq 2$ et un minorant si $u_0 \geq 2$.
4. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ quelque soit la valeur de $u_0$.

## Exercice 3 - Irrationnalité de $e$ et suites adjacentes.

Le but de cet exercice est de montrer que le nombre $e$ (exponentielle) est un nombre irrationnel. Pour cela considérons les suites réels suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

1. Rappeler la définition et le théorème sur les suites adjacentes, puis montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
2. Montrer en effectuant une récurrence et une intégration par parties que :
$$e = u_n + \int_0^1 e^t \frac{(1-t)^n}{n!} dt$$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^t \frac{(1-t)^n}{n!} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
4. Supposons que $e$ soit un rationnel. Notons $e = \frac{p}{q}$ l'écriture de $e$ sous forme de fraction. Montrer que : $q.q!u_q < q!p < q.q!u_q + 1$. En déduire que $e$ est irrationnel.

Chap 16

# Suites réelles ou complexes

*Exercices*

*A partir d'un certain âge, il faut ses lunettes pour les trouver.*

José Artur.

## *Vrai - Faux*

**Exercice 1.**

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
2. Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3. Toute suite réelle non majorée tend vers $+\infty$.
4. Toute suite de $\mathbb{N}$ injective est aussi surjective (On rappelle qu'une suite de $\mathbb{N}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$)
5. La négation de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = l \in \mathbb{R}$ est ($u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = -\infty$ )
6. Une suite positive majorée est convergente.
7. Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante.
8. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $u_n \sim v_n$
9. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.
10. $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

## *Niveau 1*

**Exercice 2.**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (u_n)^3$. On pose $v_n = \ln(u_n)$

1. Montrer que $v_n$ est bien défini.
2. Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

## Exercice 3.

Soit $(u_n)$ une suite réelle qui converge vers $l$.

1. Montrer que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. A-t-on forcément $(v_n)$ convergente ?
3. Montrer néanmoins que si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

## © Exercice 4.

$\pi = 3,1415\ldots$. On pose $u_1 = 3$, $u_2 = 1\ldots$, c'est-à-dire que $u_n$ est la n$^{\text{ième}}$ décimale de $\pi$. Est-ce que $u_n$ converge ?

## © Exercice 5.

Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ et $u_0 = 1$ est convergente. Déterminer sa limite.

## © Exercice 6.

Soit $H_n$ la suite définie par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $H_{2n} - H_n > \frac{1}{2}$
2. En utilisant le résultat précédent, montrer que $H_{2^n} - H_1 > \frac{n}{2}$
3. En déduire que $H_n$ tend vers $+\infty$.

## © Exercice 7.

Considérons une suite de la forme $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^n v_n$ où $(v_n)$ est une suite décroissante vers 0. On pose $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que les suites $a_n$ et $b_n$ sont adjacentes
2. En déduire que la limite de $u_n$

## Exercice 8.

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par $u_0 = 0$, et pour tout entier $n$ :

$$u_{n+1} = 2.u_n + 2^{n+1} \qquad\qquad v_n = u_n/2^n$$

Montrer que $(v_n)$ est arithmétique. En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

## © Exercice 9.

Soit $u_n$ et $v_n$ des suites de $[0,1]$ vérifiant $u_n.v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer que $u_n$ et $v_n$ tendent vers 1 en $+\infty$.

(c) **Exercice 10.**

Soit $a$ dans $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{[na]}{na}$ est convergente. Déterminer sa limite.

**Exercice 11.**

Trouver un équivalent de $\ln\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{4\sqrt{n^2+5n-7}}\right)$. (rep : $\ln\left(\dfrac{1}{4n}\right)$).

**Exercice 12.**

Montrer que $\underset{n\to+\infty}{lim}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$

**Exercice 13.**

Montrer qu'il existe aucune relation entre $u_n - v_n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \sim v_n$.

## *Niveau 2*

**Exercice 14.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ : $1/2 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 15.**

Soit $I_n = [u_n, v_n]$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ vérifiant

- $u_n \leq v_n$
- $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$
- Le diamètre des segments $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Notons $I$ l'intersection des $I_n$ c'est-à-dire $I = \bigcap_{k=0}^{n} I_n$. Le but de l'exercice est de montrer que $I$ est un singleton.

1. Donner un exemple de tels segments emboîtés.
2. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. On notera $l$ leur limite commune.
3. Montrer que $l$ est dans $I$.
4. Soit $b$ un élément de $I$, montrer que $b = l$.
5. Conclure.

ⓒ **Exercice 16.**

Considérons la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.

1. Montrer que $0 \leq \frac{1! + 2! + 3! + \ldots + (n-2)!}{n!} \leq \frac{n-2}{n(n-1)}$
2. En déduire la limite de $(u_n)$.

**Exercice 17.**

Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}$ décroissante telle que $u_{n+1} + u_n \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

ⓒ **Exercice 18.**

Soit $(u_n)$ une suite réelle. On pose $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.

1. Pour cette question uniquement, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Déterminer $a_n$ et $b_n$.
2. On suppose que $a_n$ et $b_n$ ont la même limite. Notons $l$ cette limite. Montrer que la limite de $(u_n)$ est également $l$.

**Exercice 19.**

**Partie I : étude d'une suite.** Soit $a$ un nombre réel positif donné.

1. Montrer que les données : "$u_0 > 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$" permettent de définir une suite u.
2. Calculer $u_{n+1} - \sqrt{a}$. En déduire que : $\forall n \geq 1$, $u_n$ est minorée par $\sqrt{a}$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $u$.
4. Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite.

**Partie II : Algorithme de calcul de la racine carrée de a**. Écrire un algorithme qui, à partir du réel $a$ ($a > 0$), calcule les termes de la suite $u_n$ correspondante et affiche à l'écran la valeur approchée de sa limite que permet la précision de la machine utilisée.

ⓒ **Exercice 20.**

Soit $H_n$ la suite définie par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

En encadrant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ par des fonctions en escalier, montrer que $H_n \sim \ln(n)$.

## *Niveau 3*

### Exercice 21 - Césaro.

Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la moyenne des éléments de la suites tend aussi vers $l$ c'est-à-dire :
$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$
2. Montrer que la réciproque du théorème précédent est fausse.
3. Généralisation : Montrer que si $u_n \underset{l\to\in}{\longrightarrow} \overline{\mathbb{R}}$ et que $(a_n)$ soit une suite telle que $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ ait pour limite $+\infty$ alors la moyenne pondérée par $(a_n)$ des éléments de la suites tend aussi vers $l$ c'est-à-dire :
$$\frac{a_1.u_1 + a_2.u_2 + \ldots + a_n.u_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

### Exercice 22 - Application de Césaro.

1. Montrer que pour toute suite réelle $(u_n)$ :
$$\underset{n\to+\infty}{lim} (u_{n+1} - u_n) = l \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_n}{n} = l$$
2. Montrer que pour toute suite réelle strictement positive $(u_n)$ :
$$\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+^* \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{n\to+\infty}{lim} \sqrt[n]{u_n} = l$$
3. En déduire que $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{27}{e^2}$ et que $v_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{1.3.5.7.\ldots.(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{e}$.

### Exercice 23.

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + nu_n^2}$

1. Montrer que $(u_n)$ est décroissante. En déduire que $(u_n)$ est convergente.
2. Étudier la fonction $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $\forall n \geq 2,\ u_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$.
4. Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = nu_n$. En déduire que $\forall n \geq 2,\ u_n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
5. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$

## Exercice 24 - Fractions continues.

Soit $(a_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. On note pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$[a_1, \ldots, a_n] \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots \frac{1}{a_n}}}}$$

**Partie I. Fractions continues finies.**

1. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $[a_0, \ldots, a_n] = [a_0, [a_1, \ldots, a_n]] = [a_0, \ldots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$
2. Notons $(p_n)$ et $(q_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ p_0 = a_0 \\ p_1 = 1 + a_0 a_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ q_0 = 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases}$$

   En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que $[a_1, \ldots, a_n] \;=\; \frac{p_n}{q_n}$
3. En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a
   a) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$
   b) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$

**Partie II. Convergence des fractions continues finies.** On suppose ici que la suite $(a_n)$ est une suite de $\mathbb{N}^*$. De plus notons $x_n = \frac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n]$.

1. Montrer que $(pn)$ et $(q_n)$ sont dans $\mathbb{N}^*$ est convergent vers $+\infty$
2. Montrer que :
   a) $x_n - x_{n-2} \;=\; \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}$
   b) $x_n - x_{n-1} \;=\; \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$
3. Montrer que les suites $(x_{2n})$ et $(x_{2n+1})$ sont adjacentes. En déduire la convergence de la suite $(x_n)$. Cette limite est noté $l = [a_0, a_1, \ldots]$.
4. Montrer que $|l - x_n| \leq \frac{1}{q_n^2}$ ce qui montre que la suite converge rapidement.

**Partie III. Représentation d'irrationnels.** Soit $x$ un irrationnel. De plus pour tout $y$ réel, notons $Frac(y)$ et $Ent(y)$ respectivement les parties fractionnaire et entière de $y$. Définissons la suite $(u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= & x \\ u_{n+1} &= & \frac{1}{Frac(u_n)} \end{cases}$$

On note également $a_n = Ent(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est bien définie.
2. Notons $c_n = [a_0, \ldots, a_{n-1}, u_n]$. Montrer que $(c_n)$ est constante. En déduire que $[a_0, a_1, \ldots] = x$.
3. Tester l'algorithme pour $x = \pi$ et $n$ dans $\{0, \ldots, 3\}$

## Exercice 25.

1. Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ majoré. Montrer qu'il existe une suite de $A$ qui converge vers $Sup(A)$.
2. Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une suite de $A$ qui converge vers $Inf(A)$.
3. Soit $D$ une partie dense de $\mathbb{R}$ alors tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de $D$.

### Ⓡ Exercice 26.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \qquad \text{(radicaux itérés)}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
2. Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$.
   a) Établir alors une relation simple entre $u_n$ et $u_{n+1}$.
   b) En déduire que $(u_n)$ converge et préciser sa limite.
3. Soit $\lambda$ dans $\mathbb{R}_+^*$ fixé. Dans cette question, on suppose que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* /a_n \;=\; \lambda^{2^n}$$
   Montrer que $u_n$ converge et déterminer sa limite (On pourra exprimer cette suite en fonction de la suite de la question précédente).
4. Soient $(a_n)$ et $(a'_n)$ deux suites à termes strictement positifs, soient $(u_n)$ et $(u'n)$ les suites associées. Montrer que :
   $$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq a'_n\right) \implies \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq u'_n\right)$$
5. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $2^{-n}\ln(a_n)$ est majorée.

## *Applications à d'autres disciplines*

### Exercice 27 - Musique..

Cet exercice utilise des résultats sur les fractions continues (cf avant).

*Rappels sur les sons :* Le son est un phénomène périodique produit par des vibrations mécaniques. Sa fréquence correspond au nombre de vibrations par seconde. L'oreille n'est pas sensible à la différence entre les fréquences mais à leur rapport. Ainsi un son de fréquence multipliée par 2 est appelé l'octave et un son de fréquence multipliée par 1.5 est appelé la quinte.

On cherche des fréquences particulières de son que l'on appellera notes. On aimerait que si une fréquence est une note la quinte et l'octave le soit aussi. De plus pour passer d'une note à la suivante, on souhaite que la fréquence soit multipliée par une constante $c$ ne dépendant pas de la note. Notons $p-1$ le nombre de notes strictement compris entre une note et son octave et $q-1$ le nombre de notes entre une note et sa quinte.

1. Montrer que $c^p = 2$ et $c^q = \frac{3}{2}$
2. Montrer que $\frac{p}{q} = \frac{\ln(2)}{\ln(3/2)}$. En déduire que ce qu'on aimerait faire n'est pas possible.
3. Approcher $\frac{\ln(2)}{\ln(3/2)}$ par une fraction continue. En déduire que les nombres les plus petits pouvant être le nombre de notes dans une octave sont 5 et 12.

Chap 16 **Suites réelles ou complexes**

*Quelques exercices corrigés*

---

Ⓡ **Exercice 26.**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \qquad \text{(radicaux itérés)}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
2. Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$.
   a) Établir alors une relation simple entre $u_n$ et $u_{n+1}$.
   b) En déduire que $(u_n)$ converge et préciser sa limite.
3. Soit $\lambda$ dans $\mathbb{R}_+^*$ fixé. Dans cette question, on suppose que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* /a_n \ = \ \lambda^{2^n}$$
   Montrer que $u_n$ converge et déterminer sa limite (On pourra exprimer cette suite en fonction de la suite de la question précédente).
4. Soient $(a_n)$ et $(a'_n)$ deux suites à termes strictement positifs, soient $(u_n)$ et $(u'n)$ les suites associées. Montrer que :
   $$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq a'_n\right) \implies \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq u'_n\right)$$
5. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $2^{-n}\ln(a_n)$ est majorée.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**1.** De $a_{n+1} > 0$, on tire $a_n + \sqrt{a_{n+1}} > a_n$, puis $a_{n-1} + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}} > a_{n-1} + \sqrt{a_n}$ et "ainsi de suite" (récurrence descendante) jusqu'à $u_{n+1} > u_n$.

**2.a.** Dans cette question, on a $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+un}$.

**2.b.** Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ définie sur $[-1, +\infty[$. Elle est strictement croissante et admet pour unique point fixe $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le nombre d'or). Par récurrence, on montre que $u_n \in I = [0, \alpha]$ : $u_0 = 1 \in I$. Supposons le résultat vrai pour $n$ fixé, montrons le pour $n+1$ : $0 \leq u_n \leq \alpha \implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$. Comme $f(0) = 1$ et comme $f(\alpha) = \alpha$, le résultat est vérifié. Ainsi, la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par $\alpha$. La suite $u_n$ converge vers un point fixe de $f$, et le seul positif est $\alpha$.

**3.** Notons $(v_n)$ la suite de la question précédente, à savoir la suite définie par la condition initiale $v_1 = 1$ et la relation de récurrence $v_n + 1 = \sqrt{1+v_n}$. Notons $(u_n)$ la suite correspondant au choix de $a_n = \lambda^{2^n}$. On observe que $un = \lambda.v_n$. Par exemple,

$$u_3 = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + \sqrt{\lambda^8}}} = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4(1+\sqrt{1})}} = \sqrt{\lambda^2\left(1 + \sqrt{(1+\sqrt{1})}\right)} = \lambda v_3$$

Donc $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = \lambda \underset{n\to+\infty}{lim} v_n = \lambda.\alpha$

**4.** On a $a_n \leq a'_n$, puis $a_{n-1} + \sqrt{a_n} \leq a'_{n-1} + \sqrt{a'_n}$, et $a_{n-2} + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}} \leq a'_{n-2} + \sqrt{a'_{n-1} + \sqrt{a'_n}}$ et ainsi, de proche en proche jusqu'à $u_n \leq u'_n$.

**4.**($\Longrightarrow$) Si $(u_n)$ est convergente, alors elle est majorée. Notons $M$, un de ses majorants. On obtient :

$$M \geq u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \geq \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots + \sqrt{a_n}}}} = (a_n)^{2^{-n}}$$

On obtient alors

$$2^{-n} \ln(a_n) \leq \ln(M)$$

**4.**($\Longleftarrow$) Soit $M$ un majorant de $2^{-n} \ln(a_n)$. Alors

$$2^{-n} \ln(a_n) \leq M \quad \Longrightarrow \quad a_n \leq e^{M.2^n} = (e^M)^{2^n} = \lambda^{2^n}$$

La dernière égalité étant obtenue en posant $\lambda = e^M$. La suite $(u_n)$ est donc inférieure à la suite $(u'_n)$ que l'on obtiendrait avec $a'n = \lambda^{2n}$ pour tout $n$. On obtient d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n \leq u'_n$$

Or, cette dernière suite $(u'_n)$ converge d'après la question 3 ; la suite $(u_n)$ est alors majorée par cette limite. De plus, elle est croissante d'après la question 1., donc elle converge.

Chap 16

# Suites réelles ou complexes

*Devoir maison*

## Problème - Moyenne arithmético-géométrique

1. Montrer que pour tout $x$, $y$ réels , on a :

$$0 < x < y \qquad \Longrightarrow \qquad x < \sqrt{x.y} < \frac{x+y}{2} < y$$

2. Soit $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n} \qquad\qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

   Montrer que $(u_n)$ est croissante, $(v_n)$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

3. En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.
4. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont même limite. Cette limite commune s'appelle la "moyenne arithmético-géométrique de a et b".