Chapitre 15

Espaces vectoriels.

1 Points importants
2 Plan du cours
3 Questions de cours
4 Exercices types
5 Exercices
6 Exercices corrigés
7 Devoir maison

Chap 15

Espaces vectoriels.

Et s'il ne fallait retenir que sept points ?

1. **Caractérisation des sous-espaces vectoriels.**

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ F \subset E \\ \forall x, y \in F,\ \ \forall \lambda, \mu \in k,\ \ \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

   Bien comprendre que lorsqu'on demande de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on essaie de l'exprimer comme un sous-espace vectoriel d'un "gros" k espace vectoriel. Ceci présuppose que vous ayez en tête une liste de "gros" k espace vectoriel comme :

   - $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, .)$ ou plus généralement $(\mathcal{F}(E, F), +, \times, .)$ où E est un ensemble et F un k espace vectoriel,
   - $(k[X], +, .)$ et ses sous-espaces vectoriels les plus connus $(k_n[X], +, .)$
   - $(\mathcal{L}(E, F), +, .)$
   - k lui-même peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même (ou sur un corps plus petit). La loi externe est donnée par la multiplication dans le corps. Ainsi par exemple $\mathbb{R}$ est un Q-ev (et aussi un $\mathbb{R}$-ev), mais pas un $\mathbb{C}$-ev.
   - k^n est un k-ev (donc par exemple $\mathbb{R}^n$) ou plus généralement $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ si les E_i sont des k-espaces vectoriels.

2. **Savoir calculer un espace vectoriel engendré.** Si A est un sous-ensemble d'un k espace vectoriel k alors $Vect(A)$ est :

   - le plus petit sous-espace vectoriel contenant A
   - l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant A
   - l'ensemble des combinaisons linéaires de A, si A est non vide

   On remarquera que $vect(E) = E$ si E est un espace vectoriel, et donc que $vect(vect(A)) = vect(A)$ si A est un ensemble

3. **La somme / somme directe de deux sous-espaces vectoriels.** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des sev de E alors la somme $E_1 + \ldots + E_n = \{x_1 + \ldots + x_n \ /\ \forall i,\ x_i \in E_i\}$ est encore un sev de G. La somme est directe et on note $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ si l'un des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

   - Tout élément de $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ se décompose de manière unique en $x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_i \in E_i$
   - Si $x_1 + \ldots + x_n = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $x_i = 0$ (c'est-à-dire que le vecteur nul se décompose de façon unique dans $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$)
   - $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $(E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i-1} + \ldots + E_n) \cap E_i = \{0\}$

   On remarquera **surtout** la traduction de la troisième ligne dans le cas où $n = 2$. Ainsi la somme $E + F$ est directe si et seulement si $E \cap F = \{0\}$. Enfin si $E = F \oplus G$ alors on dit que F est un supplémentaire de G dans E.

4. **Caractérisation des projecteurs et des symétries.** Soit E un espace vectoriel,

$$p \text{ projection } \iff \left\{ \begin{array}{l} p \in \mathcal{L}(E) \\ p\, o\, p = p \end{array} \right. \qquad s \text{ symétrie } \iff \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{L}(E) \\ s\, o\, s = Id \end{array} \right.$$

   De plus, une projection p est toujours une projection sur $Im(p)$ et de direction $Ker(p)$ et une symétrie s est toujours une symétrie par rapport à $Ker(s - Id)$ et de direction $Ker(s + id)$, ce qui impose $E = Ker(p) \oplus Im(p) = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$

5. **Les isomorphismes d'espaces vectoriels.** Les isomorphismes d'espaces vectoriels sont exactement les applications linéaires bijectives. En effet, si f est linéaire et bijective alors f^{-1} est encore une application linéaire. Se souvenir également que l'ensemble des automorphismes (=Isomorphisme+Endomorphisme) sur E muni de la composition est un groupe appelé le groupe linéaire et noté $(Gl(E), o)$.

6. **Noyau et image d'une application linéaire.** L'image et la préimage de sev par une application linéaire est encore un sev. Ainsi, si $f : E \mapsto F$ est une application linéaire, le noyau $Ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ et l'image $Im(f) = f(E)$ sont des sev respectivement de E et F. On a :

$$\begin{array}{ccc} f \text{ injective} & \iff & Ker(f) = \{0\} \\ f \text{ surjective} & \iff & Im(f) = F \end{array}$$

   A noter que la caractérisation de f surjective est encore vraie si f n'est pas linéaire.

7. **Familles libres, liées, génératrices et bases.** Outre les définitions et les propriétés élémentaires, il faut également se souvenir du comportement de telles familles vis à vis des applications. Ainsi, L'image d'une famille

•	libre	par une application	injective	est libre
•	liée	par une application		est liée
•	génératrice	par une application	surjective	est génératrice
•	base	par une application	bijective	est une base

Chap 15

Espaces vectoriels.

Plan du cours

I. Objets / Morphismes : Espaces vectoriels / Applications linéaires 2
- 1/ Définition 2
- 2/ Exemples 2
- 3/ Règles de calculs 3
- 4/ Applications linéaires 3
- 5/ Exemples d'applications linéaires 4

II. Sous-objets : Sous espaces vectoriels 4
- 1/ Théorème de caractérisation. 4
- 2/ Exemples 5
- 3/ Noyau / Image d'une application linéaire 6
- 4/ Intersection de sev 6
- 5/ Sev engendrés par une partie, exemples. 7

III. Produits et sommes d'espaces vectoriels. 8
- 1/ Produits 8
- 2/ Somme. 9
- 3/ Somme directe. 9
- 4/ Supplémentaire d'espaces vectoriels 10

IV. Projections - symétries 11
- 1/ Projections / Projecteurs 11
- 2/ Symétries / Involutions 11
- 3/ Liens entre projections et symétries 12
- 4/ Exemples de projections et de symétries. 12
- 5/ Polynômes annulateurs 12
- 6/ Exemples de projections et de symétries. 13

V. Famille libre, liée, génératrice, base 13
- 1/ Cas des familles finies. 13
- 2/ Exemples 1 : dans R^n 13
- 3/ Exemples 2 : familles de polynômes. 14
- 4/ Exemples 3 : familles de sinus et cosinus. 14
- 5/ Exemples 4 : d'autres exemples. 14
- 6/ Cas des familles infinies 15
- 7/ Propriétés des familles libres/liées/génératrices 15
- 8/ Quelques exercices importants 16

Chap 15

Espaces vectoriels.

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'un k-espace vectoriel puis d'une application linéaire. Donner également 3 exemples de chaque. (I)
2. Donner la définition du groupe linéaire $\mathcal{G}l(E)$. Pourquoi n'est-ce pas un k-espace vectoriel ? (I)
3. Donner sans preuve la liste des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. (I)
4. Rappeler la définition de l'espace vectoriel engendré par une partie, puis montrer que si F est un espace vectoriel, alors $Vect(F) = F$. (II)
5. Donner le théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels. Montrer que l'ensemble des polynômes ayant 2 pour racine est un sev de $\mathbb{R}[X]$. (II)
6. Notons P et I l'ensemble des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que P et I sont des $\mathbb{R}$- espaces vectoriels et que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$. (III)
7. Notons S_n et A_n respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A_n et S_n sont des $\mathbb{R}$- espaces vectoriels et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_n \oplus S_n$. (III)
8. On désigne par (P) l'ensemble des multiples du polynôme P. Montrer que si $deg(P) = n$ alors $\mathbb{R}[X] = (P) \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (III)
9. Soient p un projecteur et s une involution linéaire. Montrer que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ et $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + id)$. (IV)
10. Montrer que si F_1, F_2 et F_3 sont des espaces vectoriels tels que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ alors la somme $F_1 + F_2 + F_2$ n'est pas forcement directe. (IV)
11. A quelle condition sur l'application linéaire f, l'image par f d'une famille libre est-elle libre ? l'image par f d'une famille liée est-elle liée ? l'image par f d'une famille génératrice est-elle génératrice ? (V)
12. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de E. Montrer que la famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. (V)

Chap 15

Espaces vectoriels.

Exercices types

Exercice 1 - Savoir montrer qu'une famille est libre.

Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ avec $\overrightarrow{u}(1,2,3,4)$, $\overrightarrow{v}(1,3,1,1)$ et $\overrightarrow{w}(1,2,4,4)$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. (u,v,w) avec $u_n = 2^n$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
3. (P,Q,R) avec $P = X^2+1$, $Q = X^2+X+1$ et $R = X^2-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
4. (f,g,h) avec $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(1+x^2)$ et $h(x) = x^2$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. $(P_0,\dots,P_n)$ avec $P_k = (X+1)^k$ pour tout k de $\{0,\dots,n\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.
6. $(c_0,\dots,c_n)$ avec $c_k(x) = \cos(kx)$ pour tout k de $\{0,\dots,n\}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2 - Exemples classiques de projections et symétries.

Considérons les applications p et s suivantes :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \frac{1}{2}\left({}^tA + A\right) \end{array} \qquad s : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(p(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(-x) \end{array} \right) \end{array}$$

1. Montrer que p est un projecteur et s une involution linéaire.
2. En déduire des décompositions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en somme directe.
3. En déduire que p et s sont respectivement des projections et des symétries. Vous donner les caractéristiques de ces objets.
4. Déterminer la symétrie associée à p et la projection associée à s.

Exercice 3 - Savoir montrer qu'une application linéaire est injective (ou non).

Déterminer si les applications linéaires suivantes sont injectives :

1. f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = (x+y, x-z)$
2. f de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = P' + P$
3. f de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ définie par : $f(u)_0 = 0$ et $f(u)_{n+1} = u_n$.
4. ϕ de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ définie par : $\phi(f)(x) = \int_a^x f$.

Chap 15

Espaces vectoriels.

Exercices

Il a un côté sympathique, seulement
on le voit toujours de face.
F. Dard.

Vrai - Faux

Exercice 1.

E désigne ici un K-ev, et u un endomorphisme de E. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si les vecteurs x, y, z de E sont deux à deux non colinéaires alors la famille (x, y, z) est libre.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres, alors la famille est libre.
3. (x, y) est libre si y n'est pas un multiple de x.
4. Si x_p n'est pas combinaison linéaire de $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
5. Soit D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles 2 à 2 distinctes de $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ est alors somme directe de D_1, D_2, D_3.
6. $F \setminus E$ est un supplémentaire de F dans E.
7. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$, et $F = vect\{e_1, e_2\}$. Alors $vect\{e_3, e_4\}$ est un supplémentaire de F.
8. Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos^2(x)$, $x \mapsto \sin^2(x)$ sont linéairement indépendantes dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
9. Si $E = F + G$ alors $F = E - G = \{x - y \,/\, x \in E,\, y \in G\}$.
10. La famille $(1, ch, sh)$ est liée car $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) - 1 = 0$.
11. $Vect\{a, b, c\} \subset Vect\{a, b, c, d\}$.
12. $Vect(\emptyset) = \emptyset$
13. Toute linéaire est un morphisme de groupes additifs.
14. Soient f, g et h trois applications linéaires telles que les expressions suivantes aient un sens. On a alors : $f \, o \, (g + h) = f \, o \, g + f \, o \, h$.
15. Les familles $(x, y, x + y)$ et $(x, y, -x)$ sont liées.
16. $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si tout élément de E se décompose comme une combinaison linéaire de de $x_1, \ldots, x_n$.
17. L'image d'une famille libre par une application linéaire est libre.

Niveau 1

Exercice 2.

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $K_3[X]$ où
- $P_1 = X^3 + X,\ P_2 = X^2 + X,\ P_3 = 1$ et $P_4 = X + 1$.
- $P_1 = X^2 + X,\ P_2 = X^3 + X^2,\ P_3 = 1$ et $P_4 = X^3$.

© **Exercice 3.**

Les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-elles des sev ?
1. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ paire}\}$
2. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ impaire}\}$
3. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ croissante}\}$
4. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ monotone}\}$

Exercice 4.

Soit α et β dans $\mathbb{C}$. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^4$:

$$x_1 = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) \quad x_2 = (\alpha, -\alpha, \beta, \beta) \quad x_3 = (\beta, \beta, \alpha, \alpha) \quad x_4 = (\beta, -\beta, \alpha, \alpha) \quad x_5 = (1, 1, 1, 1)$$

1. Trouver une relation de liaison non triviale entre ces vecteurs. La famille $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est-elle libre ?
2. Peut-on choisir (α, β) pour que la famille (x_1, x_2, x_3, x_4) soit une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

Exercice 5.

Soit E un k-ev, u un endomorphisme de E et P un polynôme sur K de valuation nulle vérifiant $P(u) = 0$.
1. Montrer que u est bijective et donner l'expression de u^{-1}.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u.

© **Exercice 6.**

Montrer que $A \cup B$ est un sev si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$

Exercice 7.

1. Trouver dans $\mathbb{R}^3$ une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par $(1, 1, 2)$ et $(-1, 2, 3)$. Donner un supplémentaire.
2. Trouver un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$. Donner un supplémentaire.

Exercice 8.

Soit P non nul dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que (P) l'ensemble des multiples de P est un sev de $\mathbb{R}[X]$. Trouver un supplémentaire de ce sev.

Exercice 9.

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\alpha_1 = (1, 2, -1)$, $\alpha_1 = (3, 1, 4)$ et $\alpha_1 = (2, 2, 2)$ sont-ils libres ou liés ?

Niveau 2

Exercice 10.

Soit f et g des endomorphismes de E vérifiant $f\ o\ g = g\ o\ f$ alors $\begin{cases} f(\text{Ker } g) & \subset \ \text{Ker } g \\ f(\text{Im } g) & \subset \ \text{Im } g \end{cases}$

Exercice 11.

Montrer que la famille :

1. $(1, X, X^2, \ldots)$ est libre dans $k[X]$
2. $(P_0, P_1, \ldots)$ est libre dans $k[X]$ avec $\deg(P_i) = i$.
3. $(x \longrightarrow e^{nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. $(x \longrightarrow e^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. $(x \longrightarrow cosnx)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. $(x \longrightarrow sinnx)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. $(x \longrightarrow cosnx)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
8. $(x \longrightarrow sinnx)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
9. $(x \longrightarrow cosnx)_{n\in\mathbb{Z}} \cup (x \longrightarrow sinnx)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
10. $(x \mapsto f(x-a))_{a\in\mathbb{R}}$ où f non dérivable (resp. continue) en 0 et dérivable (resp. continue) ailleurs est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ex : $|x-a|$).
11. $(x \longrightarrow x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ avec $x \geq a > 0$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
12. $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur le $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Donner un supplémentaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On identifie les polynômes et les fonctions polynômes.

Exercice 13.

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels différents et f_i les formes linéaires de $\mathbb{R}[X]$, pour i dans $\{0, \ldots, n\}$, définies par $f_i(P) = P(a_i)$. Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 14.

Pour tout k de $\{0,\dots,n\}$ Soient ϕ_k les formes linéaires définies de $E=\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_k\ :\ P\mapsto P^{(k)}(0)$$

Montrer que la famille $(\phi_0,\dots,\phi_n)$ est une base de $E^*=\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$

Exercice 15.

Soit E un k espace vectoriel et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On définit à présent e_k^* la forme linéaire sur E par : $e_k^*(e_l)=\delta_{kl}$. Montrer que $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base de $E^*=\mathcal{L}(E,k)$.

Niveau 3

Exercice 16 - Lemme de Schur.

Soit E un K-ev et f un endomorphisme de E

1. Montrer que f est une homothétie si et seulement si $\forall x\in E$, $(x,f(x))$ est lié. Autre formulation : f est une homothétie si et seulement si toute droite vectorielle est stable par f.
2. Montrer que le centre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$: $Z(\mathcal{L}(E))=\{u\in\mathcal{L}(E)\ /\ \forall v\in\mathcal{L}(E),\ u\ o\ v=v\ o\ u\}$ est formé des homothéties.
3. Montrer que le commutant de $Gl(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$: $Z(\mathcal{L}(E))=\{u\in\mathcal{L}(E)/\forall v\in Gl(E)(E),\ u o v= v\ o\ u\}$ est formé des homothéties.

® **Exercice 17 - Ker(f) et Im(f) sont-ils supplémentaires ?.**

Soit E un k-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est une projection alors $E=Ker(f)\oplus Im(f)$.
2. Le morphisme f est à présent quelconque, montrer que

$$\begin{array}{rcl} Ker(f)\cap Im(f)=\{0\} & \iff & Ker(f)=Ker(f^2)\\ E=Ker(f)+Im(f) & \iff & Im(f)=Im(f^2)\end{array}$$

3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Montrer que :

$$Ker(f)=Ker(f^2)\iff Im(f)=Im(f^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $E=Ker(f)\oplus Im(f)$.

Chap 15

Espaces vectoriels.

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 17 - Ker(f) et Im(f) sont-ils supplémentaires ?.**

Soit E un k-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est une projection alors $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. Le morphisme f est à présent quelconque, montrer que

$$\begin{array}{rcl} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} & \iff & Ker(f) = Ker(f^2) \\ E = Ker(f) + Im(f) & \iff & Im(f) = Im(f^2) \end{array}$$

3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Montrer que :

$$Ker(f) = Ker(f^2) \iff Im(f) = Im(f^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

- -

1. Montrons tout d'abord que $Ker(f) \oplus Im(f)$:

$$x \in Ker(f) \cap Im(f) \implies \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \exists x' \in E,\ x = f(x') \end{array} \right. \implies \exists x' \in E, \left\{ \begin{array}{l} f(f(x')) = 0 \\ x = f(x') \end{array} \right.$$

Or $f\ o\ f = f$ car f est une projection, on a donc :

$$x \in Ker(f) \cap Im(f) \implies \exists x' \in E, \left\{ \begin{array}{l} f(x') = 0 \\ x = f(x') \end{array} \right. \implies x = 0$$

La somme est donc bien directe. Montrons à présent que $E = Ker(f) + Im(f)$. L'inclusion $\supset$ étant évidente, montrons simplement $\subset$. Pour cela il suffit de voir que tout x de E se décompose en :

$$x = (x - f(x)) + f(x)$$

où $f(x)$ est dans $Im(f)$ par définition de l'image et $x - p(x)$ est dans $Ker(f)$ car :

$$f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

2. Décomposons sens directs, réciproques ce qui fait 4 étapes :

<u>Etape 1</u> : $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \implies Ker(f) = Ker(f^2)$

$$x \in Ker(f) \implies f(x) = 0 \implies f(f(x)) = f(0) = 0 \implies x \in Ker(f^2)$$

On a donc $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ et ceci sans utiliser l'hypothèse. De plus :

$$x \in Ker(f^2) \implies f(f(x)) = 0 \implies \begin{cases} f(x) \in Im(f) \\ f(x) \in Ker(f) \end{cases}$$

Or $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$, donc $f(x) = 0$ et x est dans $Ker(f)$. On a donc montré que $Ker(f^2) \subset Ker(f)$.

<u>*Etape 2*</u> *:* $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \iff Ker(f) = Ker(f^2)$

Comme $\{0\} \subset Ker(f) \cap Im(f)$ est évident, montrons l'inclusion inverse :

$$x \in Ker(f) \cap Im(f) \implies \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists x' \in E,\ x = f(x') \end{cases} \implies \exists x' \in E, \begin{cases} x' \in Ker(f^2) \\ x = f(x') \end{cases}$$

Or $Ker(f^2) = Ker(f)$, on a donc :

$$x \in Ker(f) \cap Im(f) \implies \exists x' \in E, \begin{cases} x' \in Ker(f) \\ x = f(x') \end{cases} \implies x = 0$$

<u>*Etape 3*</u> *:* $E = Ker(f) + Im(f) \implies Im(f) = Im(f^2)$

$$y \in Im(f^2) \implies \exists x \in E,\ y = f(f(x)) \implies \exists X \in E,\ y = f(X) \text{ et } X = f(x) \implies y \in Im(f)$$

On a donc $Im(f^2) \subset Im(f)$ et ceci sans utiliser l'hypothèse comme précédemment pour les noyaux. De plus si y est dans $Im(f)$, il existe x dans E tel que $y = f(x)$. Or $E = Ker(f) + Im(f)$, donc x se décompose en $x = x_1 + f(x_2)$ où x_1 est dans $Ker(f)$. On a donc $y = f(x) = f(x_1) + f(f(x_2))) = f(f(x_2))$ et y est dans $Im(f^2)$.

<u>*Etape 4*</u> *:* $E = Ker(f) + Im(f) \Longleftarrow Im(f) = Im(f^2)$

L'inclusion $Ker(f) + Im(f) \subset E$ étant évidente, concentrons nous sur l'inclusion inverse. Soit x dans E, on a donc $f(x)$ dans $Im(f) = Im(f^2)$. Il existe donc x' tel que $f(f(x')) = f(x)$ Décomposons alors x sous la forme :

$$x = (x - f(x')) + f(x')$$

On a clairement $f(x')$ dans $Im(f)$. De plus $f(x - f(x')) = f(x) - f(f(x'))) = f(x) - f(x) = 0$, donc $x - f(x')$ est dans $Ker(f)$. On a donc $E \subset Ker(f) + Im(f)$

3. D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} dim(Ker(f)) = dim(Ker(f^2)) &\iff dim(E) - dim(Im(f)) = dim(E) - dim(Im(f^2)) \\ &\iff dim(Im(f)) = dim(Im(f^2)) \end{aligned}$$

Donc si $Ker(f) = Ker(f^2)$ on a :

$$\begin{cases} Im(f^2) \subset Im(f) \\ dim(Im(f^2)) = dim(Im(f)) \end{cases}$$

On a donc $Im(f^2) = Im(f)$. La réciproque se traite de la même façon. On a donc en dimension finie :

$$E = Ker(f) \oplus Im(f) \iff Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f^2) = Ker(f)$$

Chap 15

Espaces vectoriels.

Devoir maison

Problème - Polynôme minimal d'un endomorphisme

Soit E une $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P = a_0 + a_1.X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P(u)$ l'endomorphisme

$$P(u) = a_0 Id + a_1.u + \ldots + a_n u^n$$

où $u^k = u \; o \; u \; o \; \ldots \; o \; u$ (k fois). Enfin P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0$

1. Montrer que l'ensemble A des polynômes annulateurs de u est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Considérons l'ensemble $B = \{Deg(P) \in \mathbb{N} \; / \; P \in A \setminus \{0\}\}$. On admettra que B est non vide. Montrer que B admet un minimum n_0
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_0 dans A de degré n_0. On l'appelle le polynôme minimal de u.
4. Montrer que tout polynôme multiple de P_0 (c'est-à-dire de la forme QP_0 avec Q dans $\mathbb{R}[X]$) est dans A.
5. Soit P un polynôme de A. En effectuant la division euclidienne de P par P_0, montrer que P est un multiple de P_0
6. En déduire que $A = \{P_0 Q \; / \; Q \in \mathbb{R}[X]\}$.