Chapitre 12

Équations différentielles.

Chap 12

Équations différentielles.

Et s'il ne fallait retenir que quatre points ?

1. **Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants,** c'est-à-dire une ED de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$, avec a, b, c des réels ou des complexes.

   a. *Résolution de l'équation homogène* : on résout l'équation homogène associée, c'est-à-dire on cherche les solutions y_H de l'équation $ay'' + by' + c = 0$ (Eh). Pour cela, on commence par chercher les solutions de l'équation caractéristique $ax^2 + bx + c = 0$ (Ec). Les solutions sont données dans le tableau suivant en fonction de la nature de a, b, c et de la valeur du discriminant Δ de (Ec) :

$a, b, c \in \dots$	Valeur de Δ	Solutions de (Ec)	Solution de (Eh)	$A, B \in \dots$
$\mathbb{C}$	$\Delta = 0$	r	$y_H = (Ax + B)e^{rx}$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$	$\Delta \neq 0$	r_1, r_2	$y_H = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$	$\Delta > 0$	r_1, r_2	$y_H = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\Delta = 0$	r	$y_H = (Ax + B)e^{rx}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\Delta < 0$	$u + iv,\ u - iv$	$y_H = e^{u.x}\left(A\cos(v.x) + B\sin(v.x)\right)$	$\mathbb{R}$

   b. *Trouver une solution particulière* : pour trouver une solution particulière y_P, on regarde le second membre :

   - Si $f(x) = P(x)e^{mx}$ avec P un polynôme, on regarde si m est racine de l'équation caractéristique.

Si m n'est pas racine de (Ec)	$y_P = Q(x)e^{mx}$
Si m est racine simple de (Ec)	$y_P = xQ(x)e^{mx}$
Si m est racine double de (Ec)	$y_P = x^2Q(x)e^{mx}$

     où Q est un polynôme de même degré que P.
   - Si $f(x) = P_1(x)e^{m_1 x} + P_2(x)e^{m_2 x} + \dots$ avec P_1, P_2,... des polynômes, alors on cherche une solution particulière des équations $ay'' + by' + cy = P_i(x)e^{m_i x}$ pour tout i, et la solution y_p est obtenue en additionnant toutes ces solutions particulières. Cette méthode est appelée la superposition des solutions.
   - Si $f(x) = P(x)\cos(m.x)$ ou $f(x) = P(x)\sin(m.x)$, alors cherche une solution particulière z_p de $ay'' + by' + cy = P(x)e^{imx}$. Alors la solution particulière cherchée est $y_P = Re(z_P)$ ou $y_P = Im(z_P)$.
   - Si $f(x) = P(x)ch(m.x)$ ou $f(x) = P(x)sh(m.x)$, alors on décompose ch et sh avec des exponentielles.
   - Si f est une somme de sin, cos, sh, ch, on utilise la superposition des solutions expliquées en ii.

   c. *En déduire les solutions de l'ED totale sur chaque intervalle* : les solutions de l'ED sont alors de la forme $y = y_H + y_P$.

2. **Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1,** c'est-à-dire une équation différentielle du type $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ où a, b et c sont des fonctions réelles ou complexes continues.

   a. *Obtenir une ED résolue* : on commence par déterminer les intervalles où a ne s'annule pas. Sur chacun de ces intervalles, on divise l'équation par $a(x)$. On obtient donc une équation différentielle du type : $y' = u(x)y + v(x)$

   b. *Résolution de l'équation homogène* : on résout, sur chaque intervalle où a ne s'annulent pas, l'équation homogène associée, c'est-à-dire l'équation $y' = u(x)y$. On obtient $y_H = A.e^{U(x)}$ où U est une primitive quelconque de u et A une constante.

   c. *Trouver une solution particulière* : si la solution de l'équation homogène est $y_H = Ae^{U(X)}$, il faut chercher une solution particulière de la forme $y_P = A(x)e^{U(X)}$ où A est une application complexe. Cette méthode est appelée "Variation de la constante".

   d. *En déduire les solutions de l'ED totale sur chaque intervalle* : les solutions de l'ED sont alors de la forme $y = y_H + y_P$.

   e. *On essaie de recoller les solutions* : attention, une fois recollées, on doit avoir une fonction dérivable (donc en particulier continue).

3. **Connaître les théorèmes de Cauchy-linéaire appliqués aux $\mathbf{EDL_1}$ résolues et aux $\mathbf{EDL_2^{cc}}$.** Pour les EDL_1 résolues, pour tout couple (a, b), il existe une unique solution y telle que $y(a) = b$. Pour les EDL_2^{cc}, pour tout triplet (a, b, c), il existe une unique solution y vérifiant $y(a) = b$ et $y'(a) = c$.

4. **Connaître les principales équations différentielles se ramenant aux cas précédents.**

   a) *Bernouilli :* $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$. On divise par y^α (après avoir expliqué pourquoi c'est possible) et on pose $z = y^{1-\alpha}$. On obtient une EDL_1.

   b) *Ricatti :* $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$. On cherche une solution particulière y_P et on pose $z = y - y_P$. On obtient alors une équation de Bernouilli.

   c) *Equations d'Euler :* $ax^2y'' + bxy + c = f(x)$. On résout cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$, en posant $t = \ln(|x|)$ (c'est-à-dire $x = \varepsilon e^t$, avec $\varepsilon = +1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon = -1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Chap 12

Équations différentielles.

Plan du cours

Chap 12

Équations différentielles.

Questions de cours

---

1. Donner la définition d'une EDL_1, puis la définition d'une EDL_2^{cc}. (I)
2. Énoncer la méthode de résolution des EDL_1 résolues (ou normalisées). (II)
3. Énoncer le principe de la variation des constantes pour les EDL_1. (II)
4. Comment fait-on pour résoudre une EDL_1 non résolue (c'est-à-dire lorsque le coefficient de y' s'annule) ? (II)
5. Énoncer la méthode de résolution des EDL_2^{cc} homogènes à coefficients dans $\mathbb{C}$. (III)
6. Énoncer la méthode de résolution des EDL_2^{cc} homogènes à coefficients dans $\mathbb{R}$. (III)
7. Donner une méthode pour trouver une solution particulière dans une EDL_2^{cc} lorsque le second membre est du type $P(x)e^{mx}$ où P est dans $\mathbb{C}[X]$ et m dans $\mathbb{C}$. (III)
8. Donner une méthode pour trouver une solution particulière dans une EDL_2^{cc} lorsque le second membre est du type $P_1(x)e^{m_1x} + \ldots + P_n(x)e^{m_nx}$ où $P_1, \ldots, P_n$ sont dans $\mathbb{C}[X]$ et $m_1, \ldots, m_n$ dans $\mathbb{C}$. (III)
9. Donner une méthode pour trouver une solution particulière dans une EDL_2^{cc} lorsque le second membre est du type $P(x)\cos(mx)$ (resp. $P(x)\sin(mx)$) où P est dans $\mathbb{R}[X]$ et m dans $\mathbb{R}$. (III)
10. Donner une méthode pour trouver une solution particulière dans une EDL_2^{cc} lorsque le second membre est du type $P(x)ch(mx)$ (resp. $P(x)sh(mx)$) où P est dans $\mathbb{R}[X]$ et m dans $\mathbb{R}$. (III)
11. Énoncer le théorème de Cauchy pour les EDL_1 résolues. (II)
12. Énoncer le théorème de Cauchy pour les EDL_2^{cc}. (III)

Chap 12

Équations différentielles.

Exercices types

Exercice 1 - Autour des solutions particulières.

Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et a, b, c, α et β dans $\mathbb{R}$. Considérons les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{rcll} ay'' + by' + cy &=& P(x)e^{i\alpha x} & (E_1) \\ ay'' + by' + cy &=& Q(x)e^{i\beta x} & (E_2) \\ ay'' + by' + cy &=& P(x)\cos(\alpha x) & (E_3) \\ ay'' + by' + cy &=& Q(x)\sin(bx) & (E_4) \\ ay'' + by' + cy &=& P(x)\cos(\alpha x) + Q(x)\sin(\beta x) & (E_5) \end{array}$$

1. Soient y_1 et y_2 des solutions des équations (E_1) et (E_2). Exprimer les solutions particulières des autres équations en fonction de y_1 et y_2. Vous montrer votre résultat.
2. Que se passe-t-il si P ou Q sont à coefficients complexes ? Si a, b, c sont dans $\mathbb{C}$? α, β sont dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2 - Une $\mathbf{EDL_1}$.

Trouver les solutions maximales de l'équation différentielle : $\cos(x)y' - y\sin(x) = -\sin(2x)$.

Exercice 3 - Une $\mathbf{EDL_2^{cc}}$ avec paramètre.

Soit λ dans $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y' + 2y = e^{\lambda x}\sin(x)$$

Suivant les valeurs de λ, déterminer :

1. une solution particulière de cette équation.
2. les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation.
3. les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation.

Exercice 3 - Un changement de variable sur x.

Considérons l'équation différentielle (E) :

$$x^2y'' + xy' + y = 2x$$

Effectuer le changement de variable $X = \ln(x)$, puis résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chap 12

Équations différentielles.

Exercices

L'eau conduit l'électricité, mais si tu mets
du vin dedans, elle a plus le droit de conduire
J.M. Gourio.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Considérons les équations différentielles linéaires suivantes :

- $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0 \quad (E_1)$ où a,b et c sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- $ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E_2)$ où a,b et c sont dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Notons de plus H_1 et H_2 les équations différentielles homogènes associées à (E_1) et (E_2). Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Supposons que a ne s'annule pas et notons F une primitive de $-\frac{b}{a}$. Alors pour résoudre (H_1), on peut faire le raisonnement suivant (k et A des constantes)
$$a(x)y' + b(x)y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)} \iff \ln|y| = F(x) + k \iff y = Ae^{F(x)}$$
2. Il est possible que (H_1) n'ait pas de solution sur $\mathbb{R}$.
3. Il est possible que (E_1) n'ait pas de solution sur $\mathbb{R}$.
4. Il est possible que (E_1) n'ait pas de solution sur $\mathbb{R}$ et que a ne s'annule pas.
5. Les solutions de (H_1) forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Même question avec (H_2).
6. Les solutions de (E_1) forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Même question avec (E_2).
7. Supposons que a ne s'annule pas, alors toute solution non nulle de (E_1) ne s'annule pas.
8. Supposons que a ne s'annule pas, alors toute solution non nulle de (E_2) ne s'annule pas.
9. Soit y_1 et y_2 deux solutions particulières de (E_1) (resp. E_2) alors $y_1 - y_2$ est solution de H_1 (resp H_2).
10. Toute solution de (H_2) est de classe C^∞.
11. L'équation caractéristique de $y'' + y = 0$ est $x^2 + x = 0$.
12. Il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2) nulle en 0 et ayant une tangente horizontale en 0.
13. Il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) nulle en 0.

Rep : 6 fausses / 7 vraies (FFVFVFVFVV FVV)

Niveau 1

Ⓒ **Exercice 2.**

Résoudre $y - y' = 2x^2 + 1$

Ⓒ **Exercice 3.**

Résoudre $y - y' = xe^x$

Ⓒ **Exercice 4.**

Soit $xy' - 2y = 2$ une équation différentielle.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$
2. Peut-on "recoller" des solutions de $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ pour en faire des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.

Résoudre : $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

Ⓒ **Exercice 6.**

Résoudre $y'' - y = xe^{2x} + x^2e^{3x}$

Exercice 7.

Résoudre $y'' - y = xch(x)$

Ⓒ **Exercice 8.**

Résoudre $y'' - y = 3e^x \cos(x)$

Exercice 9.

Résoudre : $y'' + y' - 2y = 8\sin(x)$

Exercice 10.

Résoudre $y'' - 4y' + 4y = xch(2x)$

Niveau 2

Ⓒ **Exercice 11.**

Discuter des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 3y = e^{mx}$ suivant les valeurs de m.

Ⓒ **Exercice 12.**

Discuter des solutions de l'équation différentielle $y'' - \omega y = xe^x$ suivant les valeurs de ω.

Ⓒ **Exercice 13.**

Résoudre $x^2y' + y + y^2 = 0$.

Ⓒ **Exercice 14.**

Résoudre $(1 + x^3)y' = y^2 + x^2y + 2x$.

Ⓒ **Exercice 15.**

Résoudre $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$. On pourra chercher les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et effectuer le changement de variable $x = \varepsilon e^t$ où $\varepsilon = \frac{x}{|x|}$.

Exercice 16.

Résoudre sur tout intervalle ne contenant pas -1 l'équation différentielle : $(1+x)^2y''+(1+x)y'-2 = 0$.

Exercice 17.

Résoudre en effectuant un changement de variable l'équation différentielle : $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

Ⓡ **Exercice 18.**

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^x$
2. Considérons l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'en effectuant un changement de variable, on peut se ramener à l'équation précédente. En déduire les solutions de cette équation.

Niveau 3

Exercice 19.

Trouver toutes les applications f deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

Exercice 20.

Trouver toutes les applications f deux fois dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (*)$$

Chap 12 **Équations différentielles.**

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 18.**

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^x$
2. Considérons l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'en effectuant un changement de variable, on peut se ramener à l'équation précédente. En déduire les solutions de cette équation.

- -

1. C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. On commence par résoudre l'équation homogène. Pour cela, déterminons les racines de l'équation caractéristique :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

C'est un carré parfait (donc $\Delta = 0$) et on obtient 1 comme racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$y_H = (Ax + B)e^x$$

où A et B sont réels. Déterminons à présent une solution particulière. Le second membre est de la forme $P(x)e^x$ où $deg(P) = 1$. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche y_p sous la forme

$$y_p = ax^2e^x$$

On a donc $y_p' = 2axe^x + ax^2e^x$ et $y_p'' = 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x$. Comme y_p est solution de l'équation différentielle, on a :

$$(2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x) - 2(2axe^x + ax^2e^x) + (ax^2e^x) = e^x$$

Les termes en x et en x^2 s'éliminent, ils restent $2ae^x = e^x$ donc $a = \frac{1}{2}$ et $y_p = \frac{1}{2}\,x^2e^x$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$y = (Ax + B)e^x + \frac{1}{2}\,x^2e^x$$

2. L'équation différentielle est une équation d'Euler, il faut donc effectuer le changement de variable $x = e^t$ (On est sur $\mathbb{R}^+$). On pose également $z(t) = y(e^t)$, ainsi :

$$\begin{cases} z(t) = y(e^t) \\ z'(t) = e^ty'(e^t) \\ z''(t) = (e^t)^2y''(e^t) + e^ty'(e^t) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y(x) = z(t) \\ xy'(x) = z'(t) \\ x^2y''(x) = z''(t) - z'(t) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$z'' - z' - z' + z = e^t$$

D'après la question 1, on a $z(t) = (At + B)e^t + \frac{1}{2}\, x^2 e^t$ et ainsi :

$$y(x) = (A\ln(x) + B)x + \frac{1}{2}\, x\mathrm{ln}(x)^2$$

où A et B sont des réels.

Chap 12

Équations différentielles.

Devoir maison

Exercice - Une équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

sur $]-1;1[$ en posant $t = \arcsin(x)$.