Chapitre 11

Exemples de calculs d'intégrales.

Chap 11

Exemples de calculs d'intégrales.

Et s'il ne fallait retenir que sept points ?

1. **Connaître les primitives usuelles :**

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
$\cos(x)$	$\sin(x)+k$	$\dfrac{1}{ch^2(x)}$	$th(x)+k$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$	$\dfrac{1}{sh^2(x)}$	$-\frac{1}{th(x)}+k$
$ch(x)$	$sh(x)+k$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x)+k$
$sh(x)$	$ch(x)+k$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x)+k$
e^x	e^x+k	$tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+k$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+k$	$cotan(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert+k$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-cotan(x)+k$	$th(x)$	$\ln\lvert ch(x)\rvert+k$

2. **Connaître les deux formules principales :**

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
$f'.f^n \quad (n\neq -1)$	$\dfrac{f^{n+1}}{n+1}+k$	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert+k$

3. **Connaître le théorème fondamental de l'analyse.** C'est à dire que si f est continue sur un intervalle I alors $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt$ est une primitive de f pour tout réel c de I.

4. **Savoir trouver les primitives des fonctions du style $\mathbf{f(x) = sin^n(x) cos^m(x)}$.** Si m est pair, on effectue le changement de variable $X = sin(x)$ (Bioche). Si c'est n qui est pair, on pose $X = \cos(x)$ (Re-Bioche). Si m et n sont pairs, on linéarise (Pas Bioche car trop long).

5. **Savoir trouver les primitives des fonctions du style $\mathbf{f(x) = P(x)e^{mx}}$ avec P un polynôme.** Les primitives sont de la forme $F(x) = Q(x)e^{mx}$ avec $deg(Q) = deg(P)$. Pour trouver Q, il suffit d'identifier $F'(x)$ et $f(x)$.

6. **Savoir décomposer une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ en éléments simples (et donc trouver ses primitives) si Q est scindé à racines simples.** On rappelle que

$$F = \frac{P}{(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_n)} = E(X) + \frac{a_1}{(X-\lambda_1)} + \frac{a_2}{(X-\lambda_2)} + \ldots + \frac{a_n}{(X-\lambda_n)}$$

Et que pour trouver a_i, on multiplie cette équation par $(X - \lambda_i)$ et on remplace X par λ_i.

7. **Connaître quelques changements de variables qui permettent de se ramener à une fraction rationnelle :**
   a) Une fraction rationnelle en e^{mx}, on pose $X = e^{mx}$
   b) Une fraction rationnelle en sinus et cosinus, on utilise la règle de Bioche :

Expression $f(x)dx$ stable par le changement de variable	On effectue le changement de variable
$X = -x$	$X = cos(x)$
$X = \pi - x$	$X = sin(x)$
$X = \pi + x$	$X = tan(x)$
sinon	$X = tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Chap 11

Exemples de calculs d'intégrales.

Plan du cours

Chap 11

Exemples de calculs d'intégrales.

Questions de cours

1. Donner les primitives de $f(x) = (3x+2)e^x$. (II)

2. Donner les primitives de $f(x) = x^2\cos(x)$. (II)

3. Donner les primitives de tan, $cotan$, th. (II)

4. Donner les primitives de x^α avec α dans $\mathbb{R}$. (II)

5. Donner les primitives de (II)

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6. Donner les primitives de (II)

$$f_1(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \qquad f_3(x) = \frac{1}{ch^2(x)} \qquad f_4(x) = \frac{1}{sh^2(x)}$$

7. Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$. (III)

8. Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$. (III)

9. Donner les primitives de $f(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)$. (IV)

10. Énoncer la règle de Bioche. Calculer les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$ (IV)

Exemples de calculs d'intégrales.

Exercices types

Exercice 1 - Trouver la forme (f'og).g'.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \qquad I_2 = \int_0^1 x^2(x^3+1)^4 dx \qquad I_3 = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Exercice 2 - Intégrales de fractions rationnelles simples

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x-2)}dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx \qquad I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1+x^5}{x^2+1}dx \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}dx$$

Exercice 3 - Intégrales de fractions rationnelles un peu moins simples

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx \qquad I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+2)^2}dx \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

Exercice 4 - Calcul d'intégrales par changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)e^{2x}dx \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^2(x)}{cos(x)}dx$$

Exercice 5 - Équations de récurrence.

Déterminer une relation de récurrence sur les suites (I_n) suivantes :

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx \qquad I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$$

Exercice 6 - Intégrales de Wallis.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales de Wallis par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^n(x)dx$

1. Calculer I_0 et I_1 puis montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$
2. En déduire que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. Montrer que I_n est aussi égal à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)dx$

Chap 11

Exemples de calculs d'intégrales.

Exercices

"Tout corps plongé dans une baignoire reçoit un coup de téléphone."

F. Blanche.

Niveau 1

Exercice 1.

1 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

2 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \sin^2(x) dx$

3 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^4(x) dx$

4 - $\int_1^2 \frac{x^7 + 2x}{x^2(x^2+1)} dx$

5 - $\int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx$

6 - $\int_{-1}^1 \frac{x^5 - x + 1}{(x^2+1)^4} dx$

7 - $\int_0^{\ln(2)} \frac{2e^{2x} + 4}{1 + e^{4x}} dx$

8 - $\int_0^1 \frac{dx}{ch(x)}$

9 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4(x) dx}{1 + \cos^2(x)}$

10 - $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin(x) + \sin^3(x)}{\cos(2x)} dx$

11 - $\int_0^{\pi} \frac{dx}{4\sin(x) + 3\cos(x) + 5}$

12 - $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)}$

13 - $\int_0^{\ln(2)} \frac{2ch^2(x) - 1}{4sh^3(x) + 3sh(x)} dx$

14 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \sin^2(x))^2}$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x.dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} \qquad I_2 = \int_0^{-2} te^{-t^2} dt \qquad I_3 = \int_0^3 \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^{0} \frac{x^3 dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \qquad I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \qquad I_6 = \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \qquad I_8 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt \qquad I_9 = \int_1^{e^2} (x^3+1)\ln(x) dx$$

$$I_{10} = \int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x} dx \qquad I_{11} = \int_1^3 \frac{\ln(t)}{t} dt \qquad I_{12} = \int_1^2 \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$$

Exercice 3.

Déterminer les primitives pour des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \ln(x)$ 2) $f(x) = x.e^{-x}$ 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ 5) $f(x) = 2x(x^2+1)^4$ 6) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

7) $f(x) = Arcsin(x)$

Exercice 4.

Effectuer le changement de variable $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ dans l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} dx$$

puis la calculer.

Exercice 5.

On pose

$$I = \int_{64}^{729} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$$

1. Effectuer le changement de variable $X = \sqrt[6]{x}$.
2. Calculer I

Niveau 2

Exercice 6.

On pose

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x-2+\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$$

1. Mettre $-x^2+6x-8$ sous forme canonique.
2. Effectuer un changement de variable pour que sous la racine de l'intégrale on ait $\sqrt{1-y^2}$
3. Effectuer le changement de variable $z = arccos(y)$.
4. Calculer l'intégrale.

Exercice 7.

Montrer que

1. si f est impaire et continue sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ avec $a > 0$.
2. si f est paire et continue sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ avec $a > 0$.
3. si f est périodique de période T et est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Exercice 8.

Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$

1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n+1)I_n = -2nI_{n-1}$.
2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 9.

Soient p et q deux nombres entiers positifs ou nuls, on pose :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

1. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Établir la relation : $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$; en déduire $B(p,q)$.

Ⓡ **Exercice 10.**

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$; Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Chap 11 **Exemples de calculs d'intégrales.**

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 10.**

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$; Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

- -

La fonction f étant continue sur un segment, elle est bornée. Notons $\|f\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{sup} |f(x)|$. On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\right| dt &\underset{IT}{\leq} \int_0^1 \frac{|f(t)|}{|1+nt|} \\
&\leq \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{1+nt} \\
&\leq \|f\|_\infty \left[\frac{ln(1+nt)}{n} dt\right]_0^1 \\
&\leq \|f\|_\infty \frac{ln(1+n)}{n} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Enfin, $1+n \sim n$ et n tend vers $+\infty$, on peut donc appliquer la fonction ln à l'équivalence. On obtient donc :

$$\frac{\ln(1+n)}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{CC}{\longrightarrow}} 0$$

En utilisant le théorème d'encadrement sur l'inéquation $(*)$, on obtient :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt} dt = 0$$

Exemples de calculs d'intégrales.

Devoir maison

Problème - Équation de récurrence pour le calcul d'une intégrale

Pour n entier naturel, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que si $y = \sqrt{1-x^2}$ alors le point (x, y) est sur le cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1 et dans le demi-plan $y \geq 0$. En déduire la signification géométrique de I_0, puis sa valeur.
2. Calculer I_1.
3. Pour tout $n \geq 2$, exprimer I_n en fonction de I_{n-2}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera le cas n pair et le cas n impair).
4. Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers 0.
5. Montrer que $n(n+1)(n+2)I_nI_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur.