

Chapitre 10

Opérations élémentaires sur une matrice.

1	Points importants	3	Questions de cours	6	Exercices corrigés
2	Plan du cours	4	Exercices types	7	Devoir maison
		5	Exercices		

1. **Opérations élémentaires sur les matrices.** Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (resp. sur les colonnes) d'une matrice A revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par une matrice d'opération élémentaire. Ces matrices sont les matrices de transvections, dilatations et transpositions, elles sont inversibles
2. **Pivot de Gauss.** Il faut savoir utiliser le pivot de Gauss sur une matrice pour la transformer en matrice échelonnée ou échelonnée réduite. Cette méthode est utile pour...
 - Trouver l'inverse d'une matrice A . Si la échelonnée réduite obtenue est la matrice unité, la matrice A est inversible. Pour trouver A^{-1} , il suffit d'effectuer les mêmes OE sur la matrice unité.
 - Trouver le rang d'une matrice : c'est le nombre de pivots trouvés dans la matrice échelonnée (pas nécessairement réduite) obtenue. Propriétés essentielles :
 - * Le rang d'une matrice n'est pas modifié par la multiplication d'une matrice inversible à gauche ou à droite.
 - * Pour tout matrice A , on a : $rg(A) = rg({}^tA)$.
 - * Si on réduit la matrice suivant les colonnes, on trouve le même nombre de pivot. Ce nombre là est donc aussi le rang.
 - Trouver les solutions d'un système linéaire. On effectue le pivot de Gauss sur la matrice augmentée du système. On rappelle que :
 - * S'il y a un pivot sur la dernière colonne (la colonne liée aux constantes), le système n'a pas de solutions.
 - * Sinon on distingue les variables principales des variables secondaires ; les variables principales étant exactement les variables dont la colonne correspondante contient un pivot. On exprime ensuite les variables principales en fonction des variables secondaires pour écrire l'ensemble solution.
 - * Si le système n'a que des variables principales et qu'il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne, le système a une unique solution. On dit que c'est un système de Cramer.
 - * Le système est un système de Cramer si et seulement si le déterminant de la matrice associée au système (matrice non augmentée) est non nul.

- Calculer le déterminant d'une matrice carrée A . On transforme la matrice en une matrice échelonnée donc triangulaire supérieure en se rappelant des effets des opérations élémentaires sur le déterminant :

Opérations élémentaires	Effet sur le déterminant
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	Aucun
$L_i \longleftrightarrow L_j$ $C_i \longleftrightarrow C_j$	déterminant multiplié par -1
$L_i \leftarrow \lambda L_i$ $C_i \leftarrow \lambda C_i$	déterminant multiplié par λ

Ensuite, le déterminant de la matrice triangulaire supérieure est le produit des éléments sur la diagonale.

3. Propriétés fondamentales du déterminant.

- $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A inversible.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- Développement suivant une ligne ou une colonne d'un déterminant.

I. Opérations élémentaires et pivot de Gauss.....	2
1/ Opérations élémentaires sur les lignes, opérations inverses.....	2
2/ La relation d'équivalence par lignes/par colonnes.....	2
3/ Matrices d'opérations élémentaires et propriétés.....	2
4/ Opérations élémentaires par multiplication de matrices.....	2
II. Algorithme du pivot de Gauss.....	2
1/ Matrices échelonnées, méthode du pivot de Gauss partie I.....	2
2/ Matrices échelonnées réduites, méthode du pivot de Gauss partie II.....	2
3/ Théorème d'unicité de la matrice échelonnée réduite et conséquences.....	2
III. Premières applications.....	3
1/ Rang d'une matrice.....	3
2/ Propriétés.....	3
3/ Calcul de l'inverse d'une matrice.....	3
4/ Exemples.....	3
IV. Application à la résolution de systèmes linéaires.....	4
1/ Matrice et matrice augmentée associées à un système.....	4
2/ Stabilité par les opérations élémentaires sur les lignes.....	4
3/ Variables principales / Variables secondaires - Système de cramer.....	4
4/ Résolution d'un système échelonné réduit.....	4
5/ Méthode de résolution d'un système.....	4
6/ Tous les types d'exemples de système 2×2	4
7/ Autres exemples.....	4
8/ Système linéaire homogène associé.....	4
V. Application au calcul de déterminants.....	4
1/ Un peu de géométrie.....	4
2/ Théorème de construction du déterminant.....	4
3/ Propriétés élémentaires et influences des opérations élémentaires.....	4
4/ Propriétés fondamentales du déterminant.....	5
5/ Déterminant de la transposée.....	6
6/ Développement suivant une ligne ou une colonne.....	7
7/ Déterminant de matrices triangulaires et diagonales.....	7
8/ Exemples.....	7
9/ Déterminant de Vandermonde.....	7

1. Donner la liste des OE sur les lignes et sur les colonnes, puis les matrices d'OE qui leur sont associées avec leurs noms. Comment peut-on faire une OE avec une matrice d'OE ? (I)

2. Rappeler la méthode pour trouver l'inverse d'une matrice en utilisant les OE sur les lignes. Est-ce que cela fonctionne si on utilise plutôt des OE sur les colonnes ? un mélange d'OE sur les lignes et les colonnes ? Illustrer votre méthode en inversant si possible la matrice : (II)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Donner la définition du rang d'une matrice et deux de ses propriétés. (II)
4. Rappeler la méthode pour résoudre un système avec le pivot de Gauss. Illustrer votre méthode avec les systèmes : (III)

$$\begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 4x + 6y = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

5. Donner la définition du déterminant ainsi que 3 propriétés (IV)
6. Expliquer l'influence des OE sur un déterminant puis expliquer une méthode pour calculer un déterminant avec les OE sur les lignes. Est-ce que cela fonctionne si on utilise plutôt des OE sur les colonnes ? un mélange d'OE sur les lignes et les colonnes ? Illustrer votre méthode en calculant le déterminant : (IV)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1 - Résolution d'un système avec paramètre.

$$\text{Résoudre} \quad \begin{cases} 6x + 4y + z = 11 \\ + y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \\ x + 3y + z = \lambda \end{cases}$$

Exercice 2 - Introduction à la diagonalisation de matrice.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe trois valeurs de λ pour que le système $AX = \lambda X$ n'ait pas une unique solution. On note λ_1 , λ_2 et λ_3 ces valeurs de λ . Ces valeurs sont appelés les valeurs propres de A .
2. Montrer que pour $\lambda = \lambda_1$, les solutions du système sont des multiples d'un vecteur U_1 que l'on déterminera. Réalisez le même travail sur U_2 et U_3 . On dit que ces vecteurs sont les vecteurs propres associées aux valeurs propres.
3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} . La matrice P est appelée la matrice de passage.
4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. En déduire la valeur de A^n .

Exercice 3 - Déterminant de Vandermonde.

Soit $x_0, \dots, x_n$ des réels. On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, le déterminant suivant :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

1. Soit P un polynôme unitaire de degré n . Montrer que :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & P(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & P(x_1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & P(x_n) \end{vmatrix}$$

2. Déterminer un polynôme P unitaire de degré n s'annulant pour $x_0, \dots, x_{n-1}$
3. En déduire que si les (a_i) sont distincts alors $V_n \neq 0$.

"Ce qui est affirmé sans preuve,
peut être nié sans preuve."

Euclide

Vrai - Faux

Exercice 1.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Un système linéaire $AX = B$ admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
2. $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.
3. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
4. Toute matrice inversible est produit de matrices d'opérations élémentaires.
5. Si un système a au moins deux solutions, il est à une infinité.
6. Pour trouver l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, il suffit d'effectuer les opérations élémentaires suivantes sur I_2 : $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$.

Niveau 1

Exercice 2.

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 3.

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier

Niveau 2

Exercice 4.

Les systèmes suivant ont-ils des solutions. Si oui, expliciter les.

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \\ 4) \quad \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ 2x + 13y - 7z + 2t = 2 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 7y - 4z + t = -1 \end{cases} & 5) \quad \begin{cases} y + z + t = -1 \\ x + z + t = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} & 6) \quad \begin{cases} 2x + y + z + t = -5 \\ 2x + 3y - 3z + t = -1 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases} \\ \\ 7) \quad \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 12 \\ u + 3v = 0 \end{cases} & 8) \quad \begin{cases} x + y - t = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ -y + z + t = 0 \\ x - z + t = 1 \end{cases} & 9) \quad \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -3x + y + z + t = -1 \\ x - 3y + z + t = -1 \\ x + y - 3z + t = 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5.

Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse, par la méthode des opérations élémentaires sur les matrices puis par les systèmes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 7.

Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 8.

Considérons le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Déterminer une équation de récurrence sur les D_n .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, D_n = a^n - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}a^{n-2}$

Exercice 9.

Montrer que si une matrice carrée est inversible et est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors A^{-1} est aussi à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 10.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + 1y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$$

Exercice 11.

Discuter suivant les valeurs de λ des solutions du système :

$$\begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 3x + y + z - 2t - u = 3 \\ 2x - y - 3z + 7t + 5u = 3 \\ 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = \lambda \end{cases}$$

Exercice 12.

Discuter suivant les valeurs de λ des solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \end{cases}$$

Niveau 3

Exercice 13.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour p dans $\{1, \dots, n\}$, notons A_p la sous-matrice de A définie par :

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

et par Δ_p le déterminant de A_p . Les déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ sont appelés des déterminants emboîtés de A .

1. Montrer que les opérations élémentaires du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $j < i$ ne modifient pas les déterminants emboîtés.
2. Supposons jusqu'à la fin du problème que les déterminants emboîtés sont tous non nuls. Montrer que lorsque utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour rendre A échelonnée (pas forcément réduite), on n'utilise pas l'opération élémentaire de changement de lignes.
3. En déduire qu'il existe une matrice L triangulaire inférieure à diagonale de 1 et U une matrice triangulaire supérieure telles que $A = LU$. On l'appelle la décomposition LU de A ; L pour lower et U pour upper.
4. Montrer que cette décomposition est unique.

Ⓜ **Exercice 14.**

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que l'image de tout rationnel est un rationnel. Montrer que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$

Exercice 15.

Montrer en modifiant légèrement l'algorithme du pivot de Gauss que toute matrice de déterminant 1 est produit de matrices de transvection.

Ⓜ Exercice 14.

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que l'image de tout rationnel est un rationnel. Montrer que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$

Notons $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et considérons $r_0, r_1, \dots, r_n$ des rationnels distincts. Par hypothèse les $y_k = P(x_k)$ sont rationnels pour tout k de $\{0, \dots, n\}$. Ainsi :

$$\begin{cases} a_0 + a_1r_0 + a_2r_0^2 + \dots + a_nr_0^n \\ a_0 + a_1r_1 + a_2r_1^2 + \dots + a_nr_1^n \\ \vdots \\ a_0 + a_1r_n + a_2r_n^2 + \dots + a_nr_n^n \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \dots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \dots & r_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde avec des coefficients (r_k) distincts, elle est donc inversible. On a donc :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \dots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \dots & r_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ainsi les coefficients du polynôme sont obtenus par somme et multiplication de rationnels, ils sont donc rationnels.

Problème - Calcul d'un déterminant

Soient M et J les matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels définies par :

$$M_n = \begin{pmatrix} r_1 & a & \dots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & r_n \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On note également P le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (r_k - X)$$

1. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{R}$, il existe α et β réels tels que

$$\det(M + \lambda J) = \alpha + \lambda\beta$$

2. En déduire à l'aide de P la valeur de $\det(M)$ dans le cas où a et b sont distincts.
3. Calculer $\det(M)$ si $a = b$.