Chapitre 8

Matrices

Chap 8

Matrices

Et s'il ne fallait retenir que quatre points ?

1. **Opérations sur les matrices.** Savoir additionner et multiplier deux matrices, multiplier une matrice par un réel. Savoir également quand ces opérations sont possibles. Enfin connaître les structures qui découlent de ces opérations : $(\mathcal{M}_{pq}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathcal{M}_n, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

2. **Connaître les matrices particulières suivantes et leurs principales propriétés :**
   - *Les matrices inversibles.*
     - Les matrices inversibles sont exactement les matrices carrées A telle qu'il existe une matrice carrée B vérifiant $AB = I$ OU $BA = I$. Dans ce cas $B = A^{-1}$.
     - En particulier les matrices non carrées ne sont jamais inversibles.
     - Si A et B sont inversibles alors AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
   - *Les matrices diagonales.*
     - $D_n(\mathbb{R})$ est stable par les loi $+$ et $\times$.
     - Elever une matrice diagonale à puissance n revient à élever chaque coefficient à la puissance n.
     - Une matrice diagonale est inversible si et seulement si elle ne contient aucun réel nul sur la diagonale.
   - *Les matrices symétriques/antisymétriques.*
     - $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par la loi $+$ (mais pas par $\times$).
     - Les coefficients diagonaux des matrices antisymétriques sont nuls.
   - *Les matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).*
     - Le produit et la somme de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).
     - Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si elle ne contient aucun réel nul sur la diagonale.
   - *Les matrices élémentaires.*
     - La matrice $E_{ij} \times E_{kl}$ est nulle si $j \neq k$ et vaut E_{il} si $j = k$.

3. **Avoir quelques idées sur les façons de pouvoir calculer la puissance d'un matrice A.** Voici les principales :
   a) Si c'est une matrice diagonale, il suffit d'élever les coefficient de la matrice à cette puissance.
   b) On calcule les premières puissances : A^2, A^3, ... On conjecture une formule et on la démontre par récurrence. Attention, la conjecture peut s'avérer difficile.
   c) On décompose A en $D + N$ avec $DN = ND$ et où D est une matrice diagonale et N une matrice dont les puissances sont vite toutes nulles. On utilise ensuite le binôme de Newton.
   d) On décompose A sous la forme $P^{-1}DP$ où D est une matrice dont l'élévation à une puissance ne pose pas de problème, typiquement une matrice diagonale. Alors $A^n = P^{-1}D^nP$.
   e) Si les colonnes de la matrice sont proportionnelles, alors $A^n = tr^{n-1}(A).A$ (Il faut le redémontrer à chaque fois).

4. **Eviter les erreurs de débutants :**
   a) "$AB = BA$" est faux en général. Si A et B vérifiant cela, on dit que A et B commutent.
   b) "$AB = 0 \Longrightarrow (A = 0$ ou $B = 0)$" est faux en général. Pour pouvoir l'utiliser, il faut vérifier que A ou B est inversible.
   c) "$AB = AC \Longrightarrow B = C$" est faux en général. Pour pouvoir l'utiliser, il faut vérifier que A est inversible.
   d) Pour utiliser le binôme de Newton, ne pas oublier de vérifier que les matrices A et B commutent.
   e) N'employer le symbole A^{-1} que si vous êtes sûr que A est inversible.
   f) N'employer le symbole $(AB)^n = A^n B^n$ que si vous A et B commutent.
   g) La fraction $\frac{A}{B}$ de deux matrices n'a aucun sens. Remplacez-la par AB^{-1} ou $B^{-1}A$.

Chap 8

Matrices

Plan du cours

Chap 8

Matrices

Questions de cours

1. Donner les coefficients du produit de matrice AB en fonction des coefficients de A et de B. (I)

2. Soit E_{ij} et E_{kl} des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le produit $E_{ij} \times E_{kl}$. Vous montrerez votre résultat. (II)

3. Donner la définition d'une matrice symétrique, anti-symétrique, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, matrice diagonale. Les ensembles $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$, $T_n^+(\mathbb{R})$, $T_n^-(\mathbb{R})$ et $D_n(\mathbb{R})$ sont-ils stables par $+$, $\times$ et combinaisons linéaires ? (II)

4. Montrer que les matrices diviseurs de 0 puis que les matrices nilpotentes ne sont jamais inversibles. (II)

5. Soient A et B des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, (II-IV)
   1. Montrer que ${}^tA$ est inversible. Que vaut $({}^tA)^{-1}$
   2. Montrer que AB est inversible. Que vaut $(AB)^{-1}$
   3. En déduire que $(Gl_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif.

6. Les implications suivantes sont-elles vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: (III)

   $$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0 \qquad\qquad AB = AC \implies B = C$$

   Si ce n'est pas le cas, donner une condition suffisante pour qu'elles soient vraies.

Chap 8

Matrices

Exercices types

Exercice 1 - Puissance d'une matrice - Technique 1 : par intuition.

On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2, M^3, M^4.
2. Conjecturer la valeur des coefficients de M^n, puis montrer votre résultat par récurrence.

Exercice 2 - Puissance d'une matrice - Technique 2 : avec Newton.

On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Énoncer la formule du binôme de Newton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. Exprimer M en fonction de N et I. En déduire M^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
4. Calculer $(I+N)(I-N+N^2)$. En déduire M^{-1}.

Exercice 3 - Puissance d'une matrice - Technique 3 : par diagonalisation.

Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -11 \\ 0 & -13 & -20 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Montrer que $A = P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale que vous précisez.
3. En déduire A^n

Exercice 4 - Puissance d'une matrice - Technique 4 : le cas des matrices de rang 1

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice ligne L et une matrice colonne C tels que $A = C.L$
2. Montrer que $L.C = tr(A).I_1$.
3. En déduire que $A^n = (tr(A))^{n-1}.A$
4. Essayer de deviner sans démonstration les matrices pouvant s'écrire sous la forme CL où C est une matrice colonne et L une matrice ligne.

Chap 8

Matrices

Exercices

Si les miroirs réfléchissaient vraiment,
ils ne reflèteraient pas n'importe qui !

Vrai - Faux

Exercice 1.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $tr(AB) = tr(BA)$.
2. A est diagonale si et seulement si $a_{ii} \neq 0$ pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$.
3. ${}^t(AB) = {}^tA.\,{}^tB$
4. $tr(AB) = tr(A).tr(B)$.
5. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
6. Si A et B sont inversibles, alors $A.B$ est inversible.
7. Si A et B sont inversibles, alors $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
8. Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible.

Rep : 3 vraies / 5 fausses (VFFFVVFF)

Niveau 1

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3.

Calculer les produits de matrices :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.

Soit A et B des matrices carrées de taille n.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$1/\quad \left(A.B.A^{-1}\right)^3 \qquad 2/\quad \left(A+A^{-1}\right)^2 \qquad 3/\quad A^2\left(A^{-1}+2I\right)^2 - I$$
$$4/\quad A.A^{-1}.C + A.B.A^{-1} - C - B \qquad 5/\quad (A+B)^2 - A^2 - B^2$$

2. En supposant que $A^3 = 0$, simplifier $(A+2I)^5$.
3. En supposant que $A^2 = 2A$, simplifier $(A+I)^5$.

Exercice 5.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Le but de l'exercice est de calculer M^n.

1. Montrer que $M^2 = 5M - 4I$
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe deux entiers α_n et β_n tels que

$$M^n = \alpha_n.M + \beta_n.I_3$$

   En déduire une relation de récurrence des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les valeurs de α_0 et β_0.
3. Calculer α_4 et β_4. En déduire M^4.

Exercice 6.

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. En déduire qu'il existe pour tout entier n des réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$

Exercice 7.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 2$ et pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= v_n + w_n \\ w_{n+1} &= w_n \end{cases}$$

On note $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice A telle que pour tout entier n, $C_{n+1} = A \cdot C_n$.
2. Soit $B = A - I$. Calculer B^2, B^3 puis pour tout entier $n \geq 3$: B^n (est-ce valable pour $n = 0, 1, 2$?)
3. En déduire A^n puis u_n, v_n et w_n en fonction de n en fonction de n

Exercice 8.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 en déduire la valeur de A^n pour tout entier n non nul. Est-ce valable pour $n = 0$?
2. Déterminer a et b tels que $B = aA + bI$. En déduire la valeur de B^n en fonction de n.(est-ce valables pour $n = 0$?)

Niveau 2

Exercice 9.

Considérons B et C des matrices carrées de taille n telle que $C^3 = C$ et $B^2 - 3B + 2I = 0$.

1. Montrer que si $C^2 \neq I$ alors C n'est pas inversible.
2. Montrer que B est inversible.
3. Généraliser ce résultat.

Exercice 10.

Soit A et B dans $M_n(K)$ vérifiant $AB = A + B$.

1. Calculer $(I - A)(I - B)$
2. Montrer que $AB = BA$.

Ⓡ **Exercice 11.**

1. ***Partie I.*** Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Posons également $N = A - D$.

   a) Calculer N, N^2. En déduire N^n pour tout n de $\mathbb{N}$

   b) En déduire les valeurs de A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. ***Partie II.*** Notons à présent les matrices

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.

   b) Montrer que $B = P^{-1}A\,P$

   c) En déduire que : $B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3n+2 & 1-(-1)^n & 3n+1-(-1)^n \\ 3n & 1+(-1)^n & 3n-1+(-1)^n \\ -3n & -1+(-1)^n & -3n+1+(-1)^n \end{pmatrix}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. ***Partie III.*** Définissons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 2v_n + 5w_n \\ v_{n+1} = 3u_n + w_n \\ w_{n+1} = -3u_n - 2v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \text{Posons également } C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   Les valeurs initiales sont données par $u_0 = w_0 = 1$ et $v_0 = -1$.

   a) Trouver une matrice D telle que $C_{n+1} = DC_n$

   b) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n.

Exercice 12.

On note $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer : $A.E_1$, $A.E_2$, $A.E_3$, $E_1.A$, $E_2.A$, $E_3.A$.
2. Trouver les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec E_1, E_2, E_3.

Exercice 13.

Soit A dans $M_n(k)$ vérifiant $tr(AM) = 0$ pour toute matrice M de $M_n(k)$. Montrer que $A = 0$. On pourra essayer de remplacer M par les matrices élémentaires.

Niveau 3

Exercice 14.

Le but de l'exercice est de chercher l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les autres. Cet ensemble est appelé le centre de $M_n(\mathbb{R})$. Considérons une matrices A dont les coefficients sont notés par les réels (a_{ij}). De plus pour tout i et j de $\{1, \ldots, n\}$, on note par E_{ij} la matrice élémentaire contenant des 0 partout sauf à la ligne i et la colonne j où elle contient un 1.

1. Calculer $E_{11}.A$ et $A.E_{11}$. En conclure des conditions sur les coefficients de A pour que cette matrice commute.
2. Soit i et j quelconques. Calculer $E_{ij}.A$ et $A.E_{ij}$. En conclure des conditions sur les coefficients de A pour que cette matrice commute.
3. En déduire les matrices que commutent avec toutes les autres matrices.

Exercice 15.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$. Le déterminant de A est défini comme étant : $det(A) = ad - bc$

1. Montrer que : $A^2 - tr(A).A + det(A).I = 0$ (Cayley-Halmilton en taille 2).
2. Nous allons montrer que A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.
   a) Montrer que si $det(A)$ est non nul alors A est inversible.
   b) Montrer par l'absurde que si A est inversible alors $det(A) \neq 0$.
3. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de matrice A de taille (2,2) telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant que A soit une matrice telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.
   a) Montrer que A ne peut pas être inversible.
   b) Montrer que $A^2 = 0$. Conclure.

Application à d'autres disciplines.

Exercice 16 - Cryptographie - Chiffrement de Hill..

Partie I. L'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ sur lequel on a mis les opérations $+$ et $\times$. Pour effectuer une somme ou un produit, on effectue l'opération dans $\mathbb{Z}$, puis on retranche p suffisamment de fois pour que le résultat soit dans $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Par exemple, dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on a : $3 + 4 = 2$ et $3 \times 4 = 2$. Déterminer les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Partie II. Inversibilité d'une matrice dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Considérons les matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 16 \\ 7 & 8 & 19 \\ 25 & 25 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

Partie III. Chiffrement de Hill. Pour effectuer un chiffrement de Hill, on procède comme suit :

1. On choisit un entier n de $\mathbb{N}^*$ et une matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/26\mathbb{Z})$
2. On prend le texte et on enlève la ponctuation, les espaces et les accents et les minuscules sont transformées en majuscule. A présent le texte ne contient que les lettres de A à Z.
3. A chaque lettre, on associe sa position dans l'alphabet : 'A'->0, 'B'->0, 'C'->2, ... On obtient donc une liste de $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ que l'on découpe en groupe de n éléments. Le dernier groupe, si nécessaire, est complété par des éléments de $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ aléatoires.
4. On considère chaque groupe de n éléments comme une matrice colonne C, puis on effectue le produit $A.C$.
5. Les matrices colonnes obtenues sont ensuite remise sous forme de liste, puis sous forme de lettre. Le texte est codé.

Montrer que le texte 'Salut à toi grand mathématicien !' est codé à l'aide de la matrice A par :

$$VZFZTSXSXFRWEJZOQLOMABWZHRL$$

Partie IV. Déchiffrement de Hill. Pour déchiffrer un texte de Hill, il suffit de suivre les étapes du chiffrement mais en utilisant la matrice A^{-1} à la place. Sachant que le texte suivant a été codé avec la matrice A, décoder-le :

$$ARRVCZXVLTKHTCV$$

Partie V. Cryptanalyse. Le chiffrement de Hill est très fragile si on connait des mots qui sont suceptibles d'être présent dans le texte. Par exemple, vous interceptez le message suivant :

$$ZBNCHAGBNCXTTMTHQDALIZNNGLE$$

Vous savez de plus que le texte suivant a été codé par une matrice de Hill de taille 3 que nous noterons A et que la lettre devrait commencer par 'Mon chaton'. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} 25 & 2 & 32 \\ 27 & 7 & 27 \\ 13 & 0 & 13 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 12 & 2 & 19 \\ 14 & 7 & 14 \\ 13 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Il reste à inverser la matrice située à droite de A (si c'est possible) pour trouver A.

Chap 8

Matrices

Quelques exercices corrigés

Ⓡ Exercice 11.

1. ***Partie I.*** Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons également $N = A - D$.

a) Calculer N, N^2. En déduire N^n pour tout n de $\mathbb{N}$

b) En déduire les valeurs de A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. ***Partie II.*** Notons à présent les matrices

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Montrer que $B = P^{-1}A\,P$

c) En déduire que : $B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3n+2 & 1-(-1)^n & 3n+1-(-1)^n \\ 3n & 1+(-1)^n & 3n-1+(-1)^n \\ -3n & -1+(-1)^n & -3n+1+(-1)^n \end{pmatrix}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. ***Partie III.*** Définissons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 2v_n + 5w_n \\ v_{n+1} = 3u_n + w_n \\ w_{n+1} = -3u_n - 2v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \text{Posons également } C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Les valeurs initiales sont données par $u_0 = w_0 = 1$ et $v_0 = -1$.

a) Trouver une matrice D telle que $C_{n+1} = DC_n$

b) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n.

- -

1.a. $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Ainsi $N^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n = 0 \\ N & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

1.b. Comme N et D commutent (calcul rapide), on peut appliquer le binôme de Newton, ce qui donne :

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k} = C_n^0 N^0 D^n + C_n^1 N^1 D^{n-1} = D^n + n.N.D^{n-1}$$

Comme $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, on trouve : $n.N.D^{n-1} = n.N = \begin{pmatrix} 0 & 3n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

2.a. Après calcul, on trouve $PQ = 2I$ c'est-à-dire $P(\frac{1}{2}Q) = I$. Ainsi P et inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

2.b. Une simple multiplication de matrices.

2.c. $B^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP$. Ainsi :

$$P^{-1}A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3n+1 & -(-1)^n \\ 1 & 3n-1 & (-1)^n \\ -1 & -3n+1 & (-1)^n \end{pmatrix} \qquad B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3n+2 & 1-(-1)^n & 3n+1-(-1)^n \\ 3n & 1+(-1)^n & 3n-1+(-1)^n \\ -3n & -1+(-1)^n & -3n+1+(-1)^n \end{pmatrix}$$

3.a. La matrice D est la matrice $2.B$.

3.b. Comme $C_n = DC_{n-1}$ la suite C_n est géométrique et $C_n = D^nC_0 = \frac{1}{2^n}B^nC_0$. Ainsi
On trouve :

$$\begin{cases} 2^{n+1}.u_n &= (3n+2) - (1-(-1)^n) + (3n+1-(-1)^n) &= 6n+2 \\ 2^{n+1}.v_n &= (3n) - (1+(-1)^n) + (3n-1+(-1)^n) &= 6n-2 \\ 2^{n+1}.w_n &= (-3n) - (-1+(-1)^n) + (-3n+1+(-1)^n) &= -6n+2 \end{cases}$$

Chap 8

Matrices

Devoir maison

Problème - Calcul de la puissance d'une matrice

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de trouver la valeur de A^n.

1. Méthode 1
   a) Calculer A^2, A^3 et A^4.
   b) Conjecturer la valeur de A^n (on pourra remarquer si nécessaire que $32 = 2^3 \times 4$) puis démontrer votre résultat par récurrence.
2. Méthode 2. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Calculer N^2. En déduire la valeur de N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b) Déterminer la valeur de D^n, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   c) En remarquant $A = D + N$, en déduire la valeur de A^n.