# Chapitre 07

# Continuité - Dérivabilité

Chap 07

# Continuité - Dérivabilité

*Et s'il ne fallait retenir que neuf points ?*

1. **Connaître la définition epsilonesque de la continuité.** c'est-à-dire :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

   Le "$\forall\varepsilon$" et le "$\exists\eta$" ne peuvent bien sûr pas être inversés, car le $\eta$ dépend du $\varepsilon$ choisi. Les inégalités strictes doivent le rester dans le cas du $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ mais les deux autres peuvent se changer en des inégalités larges sans changer le sens de la preuve. Attention ce n'est pas une formule qu'on apprend par coeur, c'est une formule qu'on comprend !

2. **Le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.** On peut en déduire deux propositions importantes :
   a) Une application continue qui ne s'annule pas sur un intervalle est une application de signe constant.
   b) S'il existe $a$ et $b$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents avec $f$ continue sur $[a,b]$, alors $f$ s'annule. L'unicité est obtenue si $f$ est strictement monotone. De plus, on peut prendre $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ à condition de remplacer $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de $f$ en $a$ et $b$.

3. **L'image d'un segment par une application continue est un segment.** On en déduit que toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Ainsi l'expression $\underset{x\in[a,b]}{Sup}\ |f(x)|$ a toujours un sens lorsque $f$ est continue.

4. **Définition de la dérivée en un point et son interprétation géométrique.**

$$f \text{ est dérivale en } x_0 \qquad \iff \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et est dans } \mathbb{R}$$

   Cette limite si elle existe est notée $f'(x_0)$. Sur le graphe de $f$, l'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la corde joignant les points d'abscisse $x$ et $x_0$. Ainsi $f'(x_0)$ représente le coefficient directeur de la limite de ces cordes, appelée la tangente.

5. **Les opérations sur les fonctions dérivables.** La somme, la différence, le produit, le quotient, la composée de fonctions dérivables est encore dérivable. Savoir les formules ! ! ! (y compris la formule de Leibnitz : dérivée n$^{\text{ième}}$ de d'un produit).

6. $\mathbf{C^\infty(I,\mathbb{R})} \subset \ldots \subset \mathbf{\Delta^{n+1}(I,\mathbb{R})} \subset \mathbf{C^n(I,\mathbb{R})} \subset \ldots \subset \mathbf{C^0}(I,\mathbb{R})$. Connaître également des fonctions $C^0$ non $\Delta^1$ et au moins une fonction $\Delta^1$ non $C^1$.

7. **Le théorème des accroissements finis.**

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est une application dérivable sur } ]a,b[ \\ f \text{ est une application continue sur } [a,b] \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in ]a,b[ \ / \ f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Il faut retenir plusieurs autres choses sur ce théorème :

a) Si de plus, on a $f(a) = f(b)$, on retrouve le théorème de Rolles, c'est-à-dire il existe $c$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Géométriquement, le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe un point $c$ sur $]a,b[$ tel que le coefficient directeur de la tangente en $c$ (i.e. $f'(c)$) est égal au coefficient directeur de la corde reliant les points du graphe de $f$ d'abscisse $a$ et $b$ (i.e. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ )

c) Si de plus, $f'$ est bornée c'est-à-dire s'il existe $m$ et $M$ dans $\mathbb{R}$ alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

C'est l'inégalité des accroissements finis.

d) Enfin la dernière égalité nous dit que si $f'$ est borné par $k$, la fonction $f$ est $k$-lipschitzienne. Donc en particulier si $f$ est $C^1$ sur un **segment**, elle est $k$ lipschitzienne.

8. **Le théorème de prolongement $\mathbf{C^1}$.** Si $I$ est un intervalle et $a$ un point de $I$

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ \displaystyle\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f'(a) = l$$

Attention, ne pas oublier l'hypothèse de continuité en $a$, sinon le théorème est faux : retenir (et comprendre) le contre exemple : $f = \chi_{\mathbb{R}+}$ De plus, il est fort possible que $f'$ n'ait pas de limite en $a$ (donc ne vérifie pas les hypothèses du théorème) et pourtant $f$ est dérivable en a : $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Ceci montre que la réciproque est fausse.

9. **Les trois formules de Taylor $\mathbf{C^1}$.**

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & T_n(x) + f^{(n+1)}(c)\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} & \text{(Taylor-Lagrange)} \\ f(x) & = & T_n(x) + \displaystyle\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt & \text{(Taylor reste intégral)} \\ f(x) & = & T_n(x) + (x-a)^n\varepsilon(x) & \text{(Taylor-Young)} \end{array}$$

avec

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)^1}{1!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Pour les hypothèses d'applications exactes de ces formules, revoir le cour. Cependant savoir que si $f$ est $C^{(n+1)}$ sur $[x,c]$ (ou $[c,x]$), les trois formules s'appliquent. Quelques commentaires :

a) La partie principale est identique dans chacune des 3 formules de Taylor, seul le reste change.

b) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n = 0$ revient à écrire la formule des accroissements finis.

c) Comme dans le cas des accroissement finis, dans le cas où $f^{(n+1)}$ est encadré par $m$ et $M$, l'égalité de Taylor-Lagrange devient l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(x) - T_n(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Chap 07

# Continuité - Dérivabilité

*Plan du cours*

Chap 07

# Continuité - dérivabilité

*Questions de cours*

Soient $I$ un intervalle ou une réunion d'intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0$ un réel aux bornes de $I$, $l$ dans $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires ainsi que deux corollaires. Montrer également que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle. (II)

2. Que peut-on dire d'une application continue sur un segment ? Montrer également que si $f$ est continue alors $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ . (II)

3. Supposons $f$ continue et bijective d'un sous ensemble $X$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Peut-on affirmer que $f^{-1}$ est continue ? (Une preuve ou un contre-exemple est demandée). Si ce n'est pas le cas quelle hypothèse doit-on donner en plus ? (II)

4. Rappeler le théorème de Rolles ainsi que son interprétation géométrique. En déduire que la dérivée seconde de toute application $f$ dans $\Delta^2(I,\mathbb{R})$ qui s'annule 3 fois s'annule une fois. (IV)

5. Rappeler le théorème des accroissements finis ainsi que son interprétation géométrique. En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ (IV)

6. Énoncer le théorème de prolongement $C^1$. Montrer que l'hypothèse de continuité est indispensable, puis montrer que le prolongement par continuité de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ en 0 est une application de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. (IV)

7. Montrer que toute fonction $C^1$ sur un segment est lipschitzienne. (IV)

8. Soit $f$ dérivable d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points où la dérivée est nulle alors $f$ est strictement croissante. Montrer que le résultat est faux si $I$ n'est pas un intervalle. (IV)

9. Montrer que : $\begin{cases} \forall x \in [-1;1] & Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R}^* & Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$ (IV)

10. Énoncer les trois formules de Taylor (avec leurs hypothèses). Montrer que si $f$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ alors le reste dans la formule de Taylor à un ordre supérieur ou égal à $n$ est nul. (V)

Chap 07

# Continuité - Dérivabilité

*Exercices types*

## Exercice 1 - Des fonctions continues et non continues.

1. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$) est discontinue en chacun de ses points.
2. Montrer que $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. Montrer que $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$
4. Montrer que $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$

## Exercice 2 - Étude d'une suite définie implicitement.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0;+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + 9x^2 - 4 \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$. On notera $u_n$ cette unique racine.
2. Calculer $u_1$ et $u_2$, puis vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \in ]0;1[$.
3. a) Préciser le signe, pour tout réel $x \in ]0;1[$ de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
   c) Montrer que cette suite converge. On notera $L$ sa limite.

## Exercice 3 - Une application $\Delta^1$ mais non $C^1$.

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que $f$ admet un prolongement $\tilde{f}$ par continuité en 0. Que vaut $\tilde{f}(0)$ ?
2. Montrer que $\tilde{f}$ est dans $\Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mais pas dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

## Exercice 4 - Une fonction $C^\infty$ par recollement.

Considérons l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) \ = \ \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{x\to 0^+}{lim} \ f^{(n)}(x) = 0$.
3. Montrer par récurrence que $f$ est $C^\infty$.
4. Déterminer le $DL_n(0)$ de $f$.

Chap 07

# Continuité - Dérivabilité

*Exercices*

*Le temps passe et les oeufs durent.*
D. Prevost

## *Vrai - Faux*

### Exercice 1.

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ dans $\overline{I}$, et $f$, $g$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ discontinue en tout point.
2. Une fonction est lipschitzienne si et seulement si elle est continue.
3. Si $f$ est bijective et continue sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}$ est continue sur $f(A)$.
4. Si $f$ est continue et bijective sur l'intervalle $I$, alors $f$ est strictement monotone.
5. L'application $f$ définie de $I$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable en $a$ si et seulement s'il existe un réel $l$ tel que : $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + l.(x-a) + o(x-a)$
6. $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ si et seulement si $f$ est dérivable $n$ fois et si $f$ est continue.
7. Si $f_1, \dots f_n$ sont dérivables alors : $(f_1 \dots f_n)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_1 \dots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \dots f_n$
8. Si $f$ et $g$ sont dans $C^4(I, \mathbb{R})$ alors $fg$ est aussi dans $C^4(I, \mathbb{R})$ et
$$(f.g)^{(4)} = f^{(4)} + 4f^{(3)}g^{(1)} + 6f^{(2)}g^{(2)} + 4f^{(1)}g^{(3)} + g^{(4)}$$
9. Soit $f$ et $g$ dans $\Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $(f\ o\ g)' = (f'\ o\ g) \times g'$
10. Soit $f$ une application bijective de $\Delta^1(I, \mathbb{R})$. Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f'$ est dérivable en $f(a)$.
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ |cos(x) - cos(y)| \leq |x-y|$.
12. Soit $f$ dans $\Delta^1(I, \mathbb{R})$. L'application $f$ est strictement croissante si et seulement si $f' > 0$.
13. La dérivée d'une application dérivable paire est une application impaire.

**Rep :** 7 vraies / 6 fausses (VFFVV FVFVF VFV)

## *Niveau 1*

**Exercice 2.**

Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et tout $x$ de $\mathbb{R}^+$ : $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$

**Exercice 3.**

Soit g définie sur R* par :

$$g(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

1. Montrer que g est continue sur R*.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
3. Etudier les branches infinies de Cg.

**Exercice 4.**

Soit $g$ définie sur $R_+^* \setminus \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{x.\ln(x)}{x - 1}$$

et prolongée par continuité en 0 et en 1.

1. Que valent g(0), g(1) ?
2. Etudier la branche infinie de Cg.

**Exercice 5.**

Soit f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(x) = (1 - x^2).ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Montrer que $f$ est continue. Etudier la parité de $f$ et montrer que $f$ se prolonge en une fonction continue sur $[-1, 1]$.

**Exercice 6.**

1. On pose pour tout $x$ : $g(x) = e^{1+1/x}$. On donne $g(3,5) \simeq 3,61; g(3,7) \simeq 3,56; g'(3,5) \simeq -0,26$
   a) Montrer que $g(x) = x$ a une unique solution $\alpha$ et que $\alpha \in [3.5; 3.7]$
   b) Etudier la monotonie de g. Montrer que $g([3,5; 3,7]) \subset [3,5; 3,7]$.
   c) Montrer que $\forall x \in [3,5; 3,7], |g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq 1/3$.
2. Soit $u$ la suite définie par pour tout $n, u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 = 3.5$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3,5; 3,7]$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq 1/3\,|u_n - \alpha|$ puis : $|u_n - \alpha| \leq (1/3)^n/5$
   c) En déduire la limite de $(u_n)$

## © Exercice 7.

Montrer que toute fonction continue $f$ de $[a, b]$ dans $[a, b]$ a un point fixe (on pourra utiliser la fonction intermédiaire $g(x) = f(x) - x$ et montrer qu'elle admet un point fixe).

## © Exercice 8.

Montrer qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est constante. Montrer également que le résultat est encore vrai en remplaçant $\mathbb{Z}$ par ensemble fini, puis par $\mathbb{Q}$.

## Exercice 9.

Soit $g$ la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$$

1. Etudier g : continuité, limites, sens de variation.
2. Préciser les branches infinies de $C_g$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$. Donner une valeur approchée de cette solution en utilisant la méthode par dichotomie. Préciser la précision obtenue.

## Exercice 10 - Rolles à l'infini.

Soit $f$ dans $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = f(0)$.

1. Pour tout $x$ de $[0; \frac{\pi}{2}[$, notons $g(x) = f(tan(x))$. Montrer que $g$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$.
2. En utilisant le théorème de Rolles sur $g$, montrer qu'il existe $c$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f'(c) = 0$.

## Exercice 11.

Montrer que pour tout $x$ dans $[0, 1]$ : $x \leq e^x - 1 \leq e.x$ (utiliser la formule des accroissements finis).

## © Exercice 12.

Résoudre $f^2 - 3f + 2 = 0$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

## © Exercice 13.

Montrer que :

$$(1) \quad \forall x \in ]1; +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \qquad\qquad (2) \quad \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{2}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

# *Niveau 2*

**Exercice 14.**

Montrer que

1. la fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire.
2. toute fonction se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**Exercice 15.**

Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

**Exercice 16.**

1. Déterminer l'ensemble $D$ des réels $x$ tels que $e^x - e^{-x} > 0$.
2. On définit la fonction $f$ de $D$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$. On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   a) Etudier les variations de $f$ et donner les limites de $f$ aux bornes de $D$.
   b) En déduire l'existence d'un unique réel a vérifiant $f(a) = 0$, puis donner la valeur exacte de $a$.
   c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente $(T)$ à la courbe $(C)$ au point d'abscisse $a$ vaut $\sqrt{5}$.
3. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$
   b) En déduire l'équation de l'asymptote $(D)$ à la courbe $(C)$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Donner la position relative de $(D)$ et $(C)$.
4. Donner l'allure de la courbe $(C)$ en faisant figurer les droites $(D)$ et $(T)$. On admettra que $a \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2,2$.

**Exercice 17.**

Soit $0 < a < b$ et $f$ dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a,b[$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $c$ dans $]a,b[$ vérifiant $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
2. En déduire qu'il existe $c$ dans $]a,b[$ tel que la tangente en $c$ passe par l'origine

**Exercice 18.**

Soit $f$ dans $\Delta^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $f' \geq 1$ alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Montrer que si $f'' \geq 0$ et $f$ est bornée alors $f$ est constante.

## *Niveau 3*

Ⓡ **Exercice 19.**

Soit $f$ une application d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si $f$ est strictement monotone alors $f$ est injective.
2. Si $f$ est injective et continue alors $f$ est strictement monotone (On pourra si nécessaire montrer la fonction $\phi$ de $T = \{(x, y) \in I^2 \ / \ x < y\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y) = f(x) - f(y)$ garde un signe constant.)
3. Si f(I) est un intervalle et si $f$ est strictement monotone, alors $f$ est continue.

**Exercice 20.**

Soit $f$ définie par $f(x) = x.ln(x)$.

1. Etudier les variations de $f$. Préciser les branches infinies de $C_f$.
2. Montrer qu'il existe une fonction réelle $g$ et une seule sur l'intervalle $[-1/e, +\infty[$ telle que, pour tout point x de cet intervalle, on ait : $g(x).ln(g(x)) = x$.
3. Etudier les variations de $g$. En particulier, déterminer la limite de $g$ en $+\infty$. Tracer sur la même figure les courbes représentatives de $f$ et $g$.
4. Montrer que $\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{\ln(g(x))}{\ln(x)} = 1$. En déduire lorsque $x$ tend vers $+\infty$ la limite de $\dfrac{\ln(g(x))}{x}$

**Exercice 21.**

Une fonction $f$ est une fonction holdérienne s'il existe $\lambda$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x, y \in D_f, \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda. |x - y|^\alpha$$

1. Clairement toute application lipschitzienne est holdérienne, mais la réciproque est fausse : montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est une application holdérienne qui n'est pas lipschitzienne.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $f$ est constante.
3. Montrer que toute application holdérienne est continue.

**Exercice 22.**

Soit $f$ dans $\Delta^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

1. A-t-on $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ?
2. Montrer que si $f$ est $\Delta^2$ et si $f''$ bornée alors $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 23.**

Pour toute fonction $f$ continue, on note $\displaystyle\int f$ la primitive de $f$ qui s'annule en 0. Donner une expression simple de la fonction :

$$\int\int\int\cdots\int f$$

L'expression précédente contient $n$ fois le symbole $\int$.

**Exercice 24 - Le théorème de Darboux.**

Le but de l'exercice est de prouver un résultat dû à Darboux : une dérivée a toujours la propriété des valeurs intermédiaires. Plus précisément, soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ dans $\Delta^1(I,\mathbb{R})$, on va montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Soient $X=f'(x)$ et $Y=f'(y)$ deux éléments de $f'(I)$ et $Z$ dans $\mathbb{R}$ tels que $X<Z<Y$.

1. Montrer qu'il existe $h$ tel que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<Z<\frac{f(y+h)-f(y)}{h}$
2. Montrer qu'il existe $c$ tel que $Z=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$
3. Montrer enfin qu'il existe $z$ tel que $Z=f'(z)$. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
4. En déduire une fonction qui ne soit pas la dérivée d'une autre.

## *Applications à d'autres disciplines*

**Exercice 25 - Physique - Une dérivée naturelle : la vitesse..**

Un automobiliste parcourt 500km en 5h. Considérons $d(t)$ la distance parcourue par le cycliste à l'instant $t$.

1. Dans les questions suivantes, on suppose que $d$ n'est pas forcément dérivable.
   a) Montrer qu'il existe une période de 1h pendant laquelle il parcourt exactement 100km.
   b) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement une période de 3h pendant laquelle il parcourt exactement $300km$.
2. On suppose dans cette question que $d$ est $C^2$.
   a) Supposons qu'au départ la voiture est arrêtée. Montrer que l'accélération de l'automobiliste devra à un instant donné dépasser $40km/h^2$.
   b) Supposons que la voiture est arrêtée au départ et à l'arrivée du parcours. Montrer que l'accélération de l'automobiliste devra à un instant donné dépasser $80km/h^2$.

Chap 07 **Continuité - Dérivabilité**

*Quelques exercices corrigés*

® **Exercice 19.**

Soit $f$ une application d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si $f$ est strictement monotone alors $f$ est injective.
2. Si $f$ est injective et continue alors $f$ est strictement monotone (On pourra si nécessaire montrer la fonction $\phi$ de $T = \{(x, y) \in I^2 \ / \ x < y\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y) = f(x) - f(y)$ garde un signe constant.)
3. Si f(I) est un intervalle et si $f$ est strictement monotone, alors $f$ est continue.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**1.** Soit $x$, $y$ dans $I$ différents. Quitte à inverser le rôle de $x$ et $y$, on peut supposons que $x < y$. Comme $f$ est strictement croissante alors $f(x) < f(y)$. Ainsi $f(x) \neq f(y)$. L'application $f$ est donc injective.

**2.** Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ quelconques dans $T$. Montrons que $\phi(M_1)$ et $\phi(M_2)$ ont même signe. L'ensemble $T$ est convexe, ainsi comme $M_1$ et $M_2$ sont dans $T$, le segment $[M_1, M_2]$ est encore dans $T$. Ainsi $\lambda.M_1 + (1-\lambda).M_2$ est dans $T$ pour tout $\lambda$ de $[0, 1]$. Considérons l'application $\psi$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(\lambda) \ = \ \phi(\lambda.M_1 + (1-\lambda).M_2) \ = \ \phi(\lambda.x_1 + (1-\lambda).x_2) \ , \ \ \lambda.y_1 + (1-\lambda).y_2))$$

Comme $f$ est injective, $\psi$ ne s'annule pas sur $T$. De plus, $f$ est continue, donc $\psi$ est aussi continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\psi$ ne s'annule pas et en particulier $\psi(0) = \phi(M_2) = f(y_2) - f(x_2)$ et $\psi(1) = \phi(M_1) = f(y_1) - f(x_1)$ ont même signe. Comme $M_1$ et $M_2$ sont quelconques, on en déduit que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y \Longrightarrow f(x) - f(y) \text{ garde un signe constant.}$$

Donc $f$ est strictement monotone.

**3.** Supposons que $f$ ne soit pas continue en un point $x_0$ dans $I$.

<u>*Cas 1*</u> *: $x_0$ n'est pas sur les extrémités de $I$.*
Comme $f$ est croissante, les deux limites suivantes existent :

$$\underset{x \to x_0^-}{lim} \ = \ \underset{x < x_0}{Sup}\, f(x) \underset{not}{=} l^- \qquad\qquad \underset{x \to x_0^+}{lim} \ = \ \underset{x > x_0}{Inf}\, f(x) \underset{not}{=} l^+$$

Puisque $f$ n'est pas continue, on a $l^- < l^+$. Soit $a$ dans $]l^-; l^+[$ différent de $f(x_0)$. On a alors $f(x) \neq a$ pour tout $x$ de $I$.

En effet :

$$\left\{\begin{array}{llllll}\text{Si} & x < x_0 & \text{alors} & f(x) & \leq l^- & < a \\ \text{Si} & x > x_0 & \text{alors} & f(x) & \geq l^+ & < a \\ \text{Si} & x < x_0 & \text{alors} & f(x) & = f(x_0) & \neq a\end{array}\right.$$

De plus, il existe $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 < x_0 < x_2$. On a alors $f(x_1) < a < f(x_2)$, ce qui prouve que $f(I)$ n'est pas convexe, donc que $f(I)$ n'est pas un intervalle. Contradiction.

*Cas 2 : $x_0$ est l'extrémité inférieure de $I$.* Même raisonnement en prenant $l^- = f(x_0)$ et $x_1 = x_0$.

*Cas 3 : $x_0$ est l'extrémité supérieure de $I$.* Même raisonnement en prenant $l^+ = f(x_0)$ et $x_2 = x_0$.

# Continuité - Dérivabilité

*Devoir maison*

## Problème - Majoration de la dérivée à l'aide de $\|f\|_\infty$ et $\|f''\|_\infty$

Soit $f$ une application de $C^2([a,b],\mathbb{R})$

1. Montrer qu'il existe $M_0$ et $M_2$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M_0 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M_2$$

2. Considérons l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(h) = \frac{2.M_0}{h} + \frac{M_2.h}{2}$$

Montrer que $g$ admet un minimum global ; vous donnerez la valeur de la fonction en ce point.

3. Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, pour tout $h$ de $\mathbb{R}^+$, il existe $c$ dans $\mathbb{R}^+$ tel que :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f''(c)\frac{h}{2}$$

4. Montrer que $|f'(x)| \leq g(h)$. En déduire que $f'$ est bornée et que :

$$\underset{x\in[a,b]}{Sup}\, |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0.M_2}$$