Chapitre 5

Limites et comparaison de fonctions

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Et s'il ne fallait retenir que six points ?

1. **Le théorème des limites monotones pour les applications.** Soit f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ alors :

   a) si f est croissante et majorée alors $\underset{x\to b}{lim}\ f(x)$ existe et vaut $\underset{x\in]a,b[}{Sup}\ f(x)$.

   b) si f est croissante et minorée alors $\underset{x\to a}{lim}\ f(x)$ existe et vaut $\underset{x\in]a,b[}{Inf}\ f(x)$.

   c) si f est décroissante et majorée alors $\underset{x\to a}{lim}\ f(x)$ existe et vaut $\underset{x\in]a,b[}{Sup}\ f(x)$.

   d) si f est décroissante et minorée alors $\underset{x\to b}{lim}\ f(x)$ existe et vaut $\underset{x\in]a,b[}{Inf}\ f(x)$.

2. **Le théorème d'encadrement pour les applications.** S'il existe un intervalle $]a,b[$ contenant x_0 tel que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad\qquad l = \underset{x\to x_0}{lim}\ f(x) = \underset{x\to x_0}{lim}\ h(x)$$

   alors g admet une limite en x_0 et cette limite est égale à l. Une conséquence importante : le produit d'une application ayant 0 pour limite en x_0 par une application bornée au voisinage de x_0 est une application qui tend vers 0 en x_0.

3. **Caractérisation séquentielle de la limite.** C'est-à-dire, pour l dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\underset{x\to x_0}{lim}\ f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Pour toute suite } (u_n) \text{ tendant vers } x_0 \text{ on a } f(u_n) \text{ tend vers } l$$

   Remarquons que cette propriété est très utile pour montrer qu'une application n'a pas de limite en x_0. Il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers x_0 en $+\infty$ et telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'aient pas la même limite.

4. **Stabilité de la limite par les différentes opérations.** Les opérations sont : combinaisons linéraires, produit, composition, sup, inf, f^+, f^-, $|f|$.

5. **Savoir si une fonction f est équivalente, dominée ou négligeable par rapport à une fonction g en a.** Pour cela, il faut regarder d'abord si l'une des deux fonctions ne s'annule pas sur un voisinage de a privé de a. Si c'est le cas (supposons que ce soit g), il faut déterminer la limite du quotient f/g :

$$\text{Si } \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ alors } g = o(f) \text{ en } a. \qquad \text{Si } \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \text{ alors } f = o(g) \text{ en } a.$$

$$\text{Si } \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 \text{ alors } f \sim g \text{ en } a. \qquad \text{Si } \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \text{ alors } f \sim b.g \text{ en } a.$$

6. **Savoir trouver l'équivalent d'une expression.** Pour cela, il faut retenir plusieurs points :
   a) L'équivalent d'un produit est le produit des équivalents
   b) L'équivalent du somme n'est en général **pas** la somme des équivalents. Si l'on cherche l'équivalent de $f+g$, on peut :
      - regarder si $f = o(g)$ (ou $g = o(f)$). Dans ce cas $f + g \sim g$
      - regarder si $f \sim a.g$ avec $a \neq -1$. Dans ce cas $f + g \sim (1+a)g$
      - revenir aux définitions avec les ε. Cette méthode étant la plus efficace, puisqu'elle généralise les deux précédentes.
   c) On ne peut pas appliquer une fonction quelconque aux deux membres d'une équivalence (i.e. si $f \sim g$ cela n'entraîne pas (toujours) que $h\ o\ f \sim h\ o\ g$. Cependant on a quelques résultats :
      - $f \sim g \Longrightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$ pour tout α de $\mathbb{R}$
      - $f \sim g$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ou $+\infty \Longrightarrow \ln(f) \sim \ln(g)$
      - $f - g \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$

      les expressions précédentes sont vraies uniquement si elles ont un sens. Ainsi, par exemple, la deuxième n'est vraie que si les fonctions considérées sont strictement positives.
   d) On peut effectuer des changements de variables. Ainsi si $f \sim g$ en a et $h(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} a$ alors $f\ o\ h \sim g\ o\ h$ en b.

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Plan du cours

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Questions de cours

1. Donner les définitions de (I)

   - $\underset{x\to x_0}{lim}\ f(x) = l$
   - $\underset{x\to -\infty}{lim}\ f(x) = l$
   - $\underset{x\to x_0}{lim}\ f(x) = +\infty$
   - $\underset{x\to x_0^+}{lim}\ f(x) = -\infty$
   - $\underset{x\to +\infty}{lim}\ f(x) = l^-$
   - $\underset{x\to x_0^-}{lim}\ f(x) = l^+$

2. Supposons que f ait une limite identique à gauche et à droite en x_0. Montrer que ces hypothèses ne sont pas suffisantes pour conclure que f admet une limite en x_0. Compléter les hypothèses de façon à ce que le théorème devienne vrai. (I)

3. Énoncer le théorème des limites monotones pour les fonctions, puis montrer que $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^3}dt$ admet une limite en $+\infty$. (II)

4. Donner la définition de fonctions dominées, négligeables et équivalentes (On pourra si nécessaire commencer par le cas où les fonctions ne s'annulent pas). Pour chaque cas vous donnerez un exemple. (III)

6. Énoncer le théorème des croissances comparée en $+\infty$. En déduire que $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. (IV)

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Exercices types

Exercice 1 - Obtention d'équivalents.

Donner un équivalent de :

a) $\ln(x)$ en 1 *b)* $e^{\sin(x)} - 1$ en 0 *c)* $\arctan(x) - \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ *d)* $e^{\sin(\ln(x^2))} - 1$ en 1

Exercice 2 - Asymptotes.

Donner une équation de l'asymptote de f en $+\infty$ ainsi que la position relative de l'asymptote par rapport à la courbe.

a) $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *b)* $x + \dfrac{1}{\ln(x) + 1 - x}$

Exercice 3 - Appliquer ln à un équivalent.

Soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$ strictement positives. Montrer que :

$$\begin{cases} \underset{x \to x_0}{lim} \ln(f(x)) = \pm\infty \\ f \underset{x_0}{\sim} g \end{cases} \implies \ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$$

Pour la preuve, on pourra se contenter du cas où $\ln(g)$ ne s'annule pas. Donner ensuite un contre-exemple montrant que la première hypothèse est nécessaire.

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Exercices

"L'Angleterre est un pays formidable, le seul où l'on puisse rouler à gauche le samedi soir."

J.E. Hallier

Vrai - Faux

Exercice 1.

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $a \in D_f$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent vers a et telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers des valeurs différentes, alors f n'admet pas de limite en a.
4. Si $\lim\limits_{x \to a} fg(x)$ existe, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. Si $f < g$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
6. Si $I =]a, b]$ et si f est croissante et majorée sur I, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
7. Au voisinage de 0, on a : $x^2 = o(x^6)$.
8. Au voisinage de a, on a $o(f) + o(f) = o(f)$.
9. Si $f \sim g$ au voisinage de a alors $f - g = o(g)$.
10. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ alors $f \underset{a}{\sim} g$.
11. $\sin(x) \underset{0}{\sim} tan(x)$.
12. $\ln(x) \underset{0}{\sim} x$.
13. $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.
14. Si $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 2x^2 + o(x^2)$ en 0 alors $f - g$ est négligeable devant x^2.
15. $\frac{2x+o(x)}{x} = 2 + o(x)$

Rep : 7 vraies / 8 fausses (VFVFFFFVVFVFVVF)

Niveau 1

Ⓡ **Exercice 2.**

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin(x))$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} x.Arctan(e^x)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(Arctan(x)-\frac{\pi}{2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{x\ln(x)}$

Exercice 3.

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $e^x - x^2 + \ln(x)$
2. $e^{2x} - e^x + \sqrt{x}$
3. $e^{2x} - 3x\ln(x)$
4. $x^2 - \ln(x) / \left(e^x - x^2\right)$
5. $e^{\sqrt{x}} - x^2$
6. $x^{1/\sqrt{x}}$
7. $\ln\left(x^2 - x + 3\right) - x$
8. $\ln(e^x - 3x) - \ln(x)$
9. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x} + x^2$
10. $\sqrt{e^x - x + 3} - e^x + \ln\left(x^2 - 3\right)$

Exercice 4.

Déterminer la limite quand x tend vers 0 de :

1. $x^\alpha \ln(x)$ avec $\alpha > 0$
2. $\ln(x) + 1/x$
3. x^x
4. $\ln(x) - \frac{x-1}{x^2}$
5. $\frac{x^2 + 3x + 1/\ln(x)}{x - 1/\ln(x)}$
6. $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$

Exercice 5.

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$$

1. Étudier les variations de g.
2. Préciser les branches infinies de C_g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$. Donner une valeur approchée de cette solution, en indiquant la méthode employée et la précision obtenue.

Exercice 6.

Etudier les branches infinies de C_f avec :

1. $f(x) = x - (x+1).e^{-x}$
2. $f(x) = x + \sqrt{x}$
3. $f(x) = x + \sqrt{x}\sin(x)$

Exercice 7.

Déterminer la limite quand x tend vers 2 de :

1. $(x-2)\ln\left(x^2 - x - 2\right)$
2. $\dfrac{\ln(x) - \ln(2)}{x-2}$
3. $\dfrac{x\ln(x) - 2\ln(2)}{(x-2)^2}$

Niveau 2

Exercice 8.

1. Quel lien logique existe-t-il entre les affirmations suivantes, au voisinage de 0 :

   1. $f(x) \sim x$ 2. $f(x) \sim x + x^2$ 3. $f(x) \sim x + x^3$

2. Quel lien logique existe-t-il entre les affirmations suivantes, au voisinage de $+\infty$:

   1. $f(x) \sim \ln(x)$ 2. $f(x) = \ln(x) + \varepsilon(x)$ 3. $f(x) = \ln(x) + B(x)$

   où $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $B(x)$ est borné au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9.

Trouver des équivalents des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\sin(\ln(x^2))} - 1$ en 1
2. $f(x) = \ln(\tan(x))$ en $\dfrac{\pi}{4}$

Niveau 3

ⓒ Exercice 10.

Soit f définie par $f(x) = x.ln(x)$.

1. Etudier les variations de f. Préciser les branches infinies de C_f.
2. Montrer qu'il existe une fonction réelle g et une seule sur l'intervalle $[-1/e, +\infty[$ telle que, pour tout point x de cet intervalle, on ait : $g(x).ln(g(x)) = x$.
3. Etudier les variations de g. En particulier, déterminer la limite de g en $+\infty$. Tracer sur la même figure les courbes représentatives de f et g.
4. Montrer que $\underset{x \to +\infty}{lim} \dfrac{\ln(g(x))}{\ln(x)} = 1$. En déduire lorsque x tend vers $+\infty$ la limite de $\dfrac{\ln(g(x)}{x}$

Applications à d'autres disciplines.

Exercice 11 - Économie - Apparition du nombre e dans un placement financier.

On place une somme d'argent S sur un compte rémunéré à $p\%$ par an. Ensuite pour tout entier naturel n non nul, on découpe l'année en n périodes égales. A la fin de chaque période, la banque verse sur le compte $\frac{p}{n}\%$ de l'argent qui se trouve sur le compte ; c'est la capitalisation. Notons u_n l'argent sur le compte après un an.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de p, puis montrer que $u_n = \left(1 + \dfrac{p}{n}\right)^n$
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a : $\ln(1 + x) \geq \dfrac{x}{1 + x}$.
3. Étudier la fonction $f(x) = \left(1 + \frac{p}{x}\right)^x$ sur $[1; +\infty[$. En particulier, montrer que f est croissante et que sa limite en $+\infty$ est e^p.
4. En déduire que l'argent sur le compte est d'autant plus grand que n est grand.
5. En déduire également que l'argent sur le compte après un an ne peut dépasser $S.e^p$.

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 2.**

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\underset{x\to 0^+}{lim} \; x\ln(\sin(x))$
2. $\underset{x\to -\infty}{lim} \; x.Arctan(e^x)$
3. $\underset{x\to +\infty}{lim} \; x\left(Arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $\underset{x\to +\infty}{lim} \; \dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{x\ln(x)}$

- -

1. On a $sin(x) \underset{0}{\sim} x$. La limite de ces deux fonctions étant 0^+ en 0^+, on peut appliquer le logarithme. On obtient donc $x\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} x\ln(x)$ et f_1 tend vers 0 quand x tend vers 0 par croissances comparées.

2. $Artan(x) \sim x$ en 0, donc $Arctan(e^x) \sim e^x$ en $-\infty$. Ainsi $f_2(x) \sim xe^x$ en $-\infty$ et tend donc vers 0 par croissances comparées.

3. En posant $X = \frac{1}{x}$ et en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \arctan x + \arctan\frac{1}{x} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

on a :

$$\underset{x\to +\infty}{lim} \; x\left(Arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right) \;=\; \underset{X\to 0^+}{lim} \; \frac{1}{X}\left(Arctan\frac{1}{X} - \frac{\pi}{2}\right) \;=\; \underset{X\to 0^+}{lim} \; -\frac{\arctan X}{X} \;=\; -1$$

La dernière égalité étant obtenue en utilisant $\arctan X \sim X$ en 0.

4. On posant $a = e^{\frac{1}{8}}$, on obtient :

$$\underset{x\to +\infty}{lim} \; \frac{e^{\frac{x}{4}}}{x\ln(x)} \;=\; \underset{x\to +\infty}{lim} \; \frac{a^{2x}}{x\ln(x)} \;=\; \underset{x\to +\infty}{lim} \; \frac{a^x}{x}.\frac{a^x}{\ln(x)}$$

Comme $a > 1$, par croissances comparées, la limite est $+\infty$.

Chap 5

Limites et comparaison de fonctions

Devoir maison

Problème - Des calculs de limites

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $\left(e^{2x} - 3x + 2\right) / \ln(x)$
2. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$
3. $e^{x^2} - \ln(x)$
4. $e^x - \ln(\ln(x))$

Déterminer la limite quand x tend vers 0 de :

5. $\ln\left(1 + x^2\right) / x$
6. $\dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$
7. $x \ln(e^x - 1)$
8. $e^{1/x} \sqrt{x(x+2)} - x$