Chapitre 4

Fonctions usuelles

Chap 4

Fonctions usuelles

Et s'il ne fallait retenir que cinq points ?

1. **Savoir dériver des fonctions du type** $u(x)^{v(x)}$ (Avec $u(x) > 0$ bien sûr). La ruse étant d'écrire la fonction sous la forme $e^{v(x)\ln(u(x))}$.

2. **Fonctions exponentielle, logarithme, puissances.** Connaître les graphes (Cad la forme de la courbe mais aussi les limites, les domaines de définitions, quelques points particuliers...), les dérivées, les formules essentielles (cf cours Terminale)

3. **Fonctions circulaires.** Ce qu'il faut connaître sur les fonctions circulaires (cos, sin, tan, $Arccos$, $Arcsin$ et $Arctan$) :
   a) les graphes des fonctions (cad aussi les domaines, les variations, les limites, ...)
   b) les dérivées. On a $cos' = -sin$ $sin' = cos$ et :
   $$Arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
   Un petit effort s.v.p., apprenez ces dérivées.
   c) Les relations entre cos et $Arccos$, sin et $Arcsin$...
   $$\begin{array}{ll} cos(Arccos(x)) = x & Arccos(cos(\theta)) = \theta \text{ si } \theta \in [0;\pi] \\ sin(Arcsin(x)) = x & Arcsin(sin(\theta)) = \theta \text{ si } \theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ tan(Arctan(x)) = x & Arctan(tan(\theta)) = \theta \text{ si } \theta \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ cos(Arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} & sin(Arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

4. **Fonctions hyperboliques.** Ce qu'il faut connaître sur les fonctions hyperbolique (ch, sh, th, $Argsh$, $Argch$ et $Argth$) :
   a) les graphes des fonctions (cad aussi les domaines, les variations, les limites, ...)
   b) les dérivées. On a $ch' = sh$ $sh' = ch$ et :
   c) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$. C'est la seule formule de trigonométrie hyperbolique qu'il faut savoir ; les autres étant à savoir retrouver.

Chap 4

Fonctions usuelles

Plan du cours

Chap 4

Fonctions usuelles

Questions de cours

1. On définit l'application ln comme la primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. (I)

2. Rappeler la définition de a^b avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Tracer, selon les valeurs du réel b, l'allure générale de la fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^b$. (II)

3. Déterminer en fonction de n dans $\mathbb{Z}$ le domaine de définition de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$. (II)

4. Tracer les fonctions *Arccos*, *Arcsin* et *Arctan*. (IV)

5. Rappeler les dérivées des fonctions *Arccos*, *Arcsin* et *Arctan* ainsi qu'un moyen de les retrouver. (IV)

6. Donner les valeurs de $Arccos(x)$ et $Arcsin(x)$ pour x dans $\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$ puis les valeurs de $Arctan(x)$ pour x dans $\{\sqrt{3}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$. (IV)

7. Donner la valeur de $cos(Arcsin(x))$ et de $sin(Arccos(x))$. Vous montrerez votre résultat. (IV)

8. Déterminer les valeurs de x pour avoir : (IV)

$$\begin{array}{lll} Arccos(cos(x)) = x & Arcsin(sin(x)) = x & Arctan(tan(x)) = x \\ cos(Arccos(x)) = x & sin(Arcsin(x)) = x & tan(Arctan(x)) = x \end{array}$$

Chap 4

Fonctions usuelles

Exercices types

Exercice 1 - Un peu de trigonométrie hyperbolique.

1. Retrouver les valeurs de $ch(2x)$, $sh(2x)$, $th(2x)$.
2. Déterminer la formule de $ch(a) + ch(b)$.
3. Soit x non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ch(kx)$.

Exercice 2 - Dériver pour intégrer.

Montrer que :

1. $\forall x \in [-1, 1],\ Arcos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ Artan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = \pm\frac{\pi}{2}$
3. $\forall x \in [-1, 1],\ Arcos(x) + Arccos(-x) = \pi$
4. $Arcsin$ est impaire.
5. $Arctan$ est impaire.

Exercice 3 - Construction de $Argch$

1. Montrer que ch n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que l'application $chbij = ch|_{\mathbb{R}+}^{[1;+\infty[}$ est bijective. On note $Argch$ son application réciproque.
3. Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[,\ ch(Argch(x)) = x$.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Argch(ch(x)) = x$.
5. Déterminer la valeur pour tout x de $\mathbb{R}$ de : $Argch(ch(x))$
6. Montrer que pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $sh(Argch(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.
7. Rappeler le théorème de la dérivée de l'inverse, en déduire que $Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Chap 4

Fonctions usuelles

Exercices

"Il ne change pas souvent d'idées, car il n'en a pas des masses."

P. Perret.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ Arccos(cos(x)) = x.$
2. $\forall x \in [-1, 1],\ \ Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ Arctan(x) = \frac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ ch^2(x) + sh^2(x) = 1.$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ Arcsin(cos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
6. $\forall x, a, b \in \mathbb{R},\ \ (x^a)^b = x^{ab}$

Rep : 5 fausses / 1 vraies (FVFFFF)

Niveau 1

Exercice 2.

Déterminer le domaine de définition des équations suivantes, puis les résoudre :

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
2. $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$
3. $Arccos(x) = Arcsin(2x)$
4. $arctan(x) + arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 3.

Calculer

1. $arccos\left(cos\frac{4\pi}{3}\right)$, $arcsin\left(sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $arctan\left(tan\frac{-6\pi}{5}\right)$.
2. $cos(arcsin(x))$, $tan\,(arccos(x))$, $sin(arctan(x))$, $cos(arctan(x))$.

Exercice 4.

Résoudre $ch(x) = 2$, $sh(x) = 4$.

Exercice 5.

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = Argsh(cos(x))$
2. $g(x) = Arctan(Argsh(Argchx))$
3. $h(x) = \ln(Argshx^2)$

Exercice 6.

Simplifier les expressions :

1. $sh^2(x)cos^2(y) + ch^2(x)sin^2(y)$
2. $ch^2(x)cos^2(x) + sh^2(x)sin^2(x)$

Exercice 7.

Montrer que $ch^2(x) + sh^2(y) = ch(x + y)ch(x - y)$

Exercice 8.

Calculer l'image de $\frac{1}{2}\ln(3)$ par la fonction $f(x) = 2ch(x) - sh(x)$.

Niveau 2

Exercice 9.

1. Exprimer $ch(x)$ et $sh(x)$ en fonction de $th(x/2)$
2. Soit a, b, c dans $\mathbb{R}$. Résoudre l'équation $a.ch(x) + b.sh(x) = c$

Exercice 10.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} ch(kx)$

Exercice 11.

Simplifier, en effectuant un changement de variable adéquate, l'expression $Arccos(2t^2 - 1)$.

Niveau 3

Exercice 12.

Exprimer $ch(nx)$ et $sh(nx)$ en fonction de $ch(x)$ et $sh(x)$.

Exercice 13.

Soit $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

1. Montrer que $ch(t) = \dfrac{sh(2t)}{2sh(t)}$ pour tout t de $\mathbb{R}^*$.
2. Calculer $P_n(x)$ pour x non nul.
3. En déduire la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

R **Exercice 14.**

Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit par :

$$f(x) = Arccos\left(4x^3 - 3x\right)$$

1. Exprimer les polynômes $P_1(x) = 4x^3 - 3x - 1$ et $P_2(x) = 4x^3 - 3x + 1$ comme produit de polynômes de degré 1.
2. Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = [-1; 1]$
3. Montrer que $Arccos(x) + Arcos(-x) = \pi$. En déduire que pour tout x de $[-1; 1]$, on a $f(-x) = \pi - f(x)$.
4. En déduire une manière de tracer la courbe définie sur $[-1; 0]$, à partir de celle obtenue sur $[0, 1]$. Dans le reste de l'exercice, nous étudierons donc f sur l'ensemble $[0, 1]$.
5. Montrer que $f(\cos(\theta)) = Arccos(\cos(3\theta))$.
6. Prenons θ dans $[0; \frac{\pi}{2}]$. En fonction des valeurs de θ, donner une expression simplifiée de $f(\cos(\theta))$.
7. Pour quelles valeur de $[0, 1]$, la fonction f est-elle dérivable ?
8. Calculer f' et déterminer son signe.
9. Donner le tableau de variation de f, puis tracer la courbe.

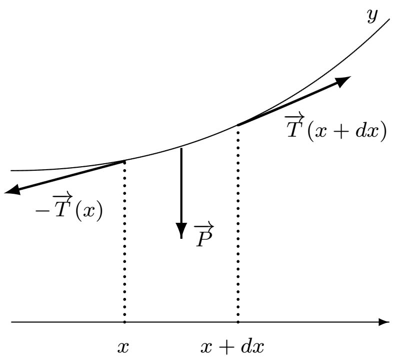
Application à d'autres disciplines.

Exercice 15 - Physique - Équation d'une chainette.

Le but de l'exercice est de chercher la courbe obtenue en tenant une chainette par ses deux extrémités. Pour cela on supposera que la courbe obtenue est suffisamment régulière c'est-à-dire qu'elle est deux fois dérivable.

Notons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ les extrémités de la chainette, puis pour tout réel x de $[x_A, x_B[$ on désigne par dx un réel strictement positif tel que $x + dx \leq x_B$, $y(x)$ l'ordonnée du point de la chainette ayant x pour abscisse, $\overrightarrow{T}(x)$ la tension exercée en x par la partie droite de la chainette (les points x' tels que $x' > x$) sur la partie gauche, $T_x(x)$ et $T_y(x)$ les coordonnées de $T(x)$, $l(x)$ la longueur de la chainette entre x_A et x.

De plus pour toute fonction f dépendant de x, on notera $df = f(x + dx) - f(x)$. On donne ainsi un sens à : dy, dl, $d\overrightarrow{T}$, dT_x et dT_y. Enfin pour des questions "physiques" on admettra que la tension $\overrightarrow{T}$ est tangente à la courbe y. Si on considère la chainette entre x et $x + dx$ et que l'on note $\overrightarrow{P}$ le poids de cette partie de chainette, on peut résumer la situation par le dessin suivant :



1. Montrer que l'application sh de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective et que $(sh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Vérifier que pour toute fonction f dépendant de x, on a $\lim\limits_{dx \to 0} \dfrac{df}{dx} = f'(x)$.
3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique (la somme des forces exercées sur un objet à l'équilibre est nulle), montrer que $dT_x = 0$ et que $dT_y = P$.
4. En déduire que T_x est constante, puis montrer que $dT_y = T_x.dy'$.
5. On admet que $l'(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$. Notons μ la masse linéique de la chainette. Montrer que :
$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \frac{\mu g}{T_x} \underset{def}{=} \frac{1}{a}$$
6. En déduire qu'il existe des réels b et c tels que $y(x) = a\text{ch}\left(\frac{x}{a} + b\right) + c$.
7. Montrer qu'en effectuant un changement de repère, l'équation de la chainette est :
$$y(x) = a\,\text{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Chap 4

Fonctions usuelles

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 14.**

Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit par :

$$f(x) = Arccos\left(4x^3 - 3x\right)$$

1. Exprimer les polynômes $P_1(x) = 4x^3 - 3x - 1$ et $P_2(x) = 4x^3 - 3x + 1$ comme produit de polynômes de degré 1.
2. Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = [-1; 1]$
3. Montrer que $Arccos(x) + Arcos(-x) = \pi$. En déduire que pour tout x de $[-1; 1]$, on a $f(-x) = \pi - f(x)$.
4. En déduire une manière de tracer la courbe définie sur $[-1; 0]$, à partir de celle obtenue sur $[0, 1]$. Dans le reste de l'exercice, nous étudierons donc f sur l'ensemble $[0, 1]$.
5. Montrer que $f(\cos(\theta)) = Arccos(\cos(3\theta))$.
6. Prenons θ dans $[0; \frac{\pi}{2}]$. En fonction des valeurs de θ, donner une expression simplifiée de $f(\cos(\theta))$.
7. Pour quelles valeur de $[0, 1]$, la fonction f est-elle dérivable ?
8. Calculer f' et déterminer son signe.
9. Donner le tableau de variation de f, puis tracer la courbe.

- -

1. On remarque que 1 est solution évidente de P_1 et -1 est solution évidente de P_2. Avec la méthode de Horner, on trouve :

$$\begin{array}{rcccl} P_1(x) & = & 4x^3 - 3x - 1 & = & (x-1)(2x+1)^2 \\ P_2(x) & = & 4x^3 - 3x + 1 & = & (x+1)(2x-1)^2 \end{array}$$

2. La fonction $Arccos$ est définie sur $[-1; 1]$, ainsi le domaine de définition comprend tous les x de $\mathbb{R}$ vérifiant $-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$ ce qui est équivalent à $P_1(x) \leq 0$ et $P_2(x) \geq 0$. En utilisant la question précédent, et en utilisant qu'un carré est toujours positif, on trouve $x + 1 \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.

3. $f(-x) = Arccos(4(-x)^3 - 3(-x)) = Arccos(-(4x^3 - 3x))$. Il suffit de voir ce que c'est que $Arccos(-X)$:

$$Y = Arccos(-X) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Cos(Y) = -X \\ Y \in [0, \pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Cos(\pi - Y) = X \\ \pi - Y \in [0, \pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \pi - Y = Arccos(X)$$

En conclusion $Arccos(-X) = Y = \pi - Arccos(X)$, donc $f(-x) = \pi - f(x)$.

4. Soit M un point de coordonnées $M(x, f(x))$. Le points M' d'abscisse $-x$ aura donc pour coordonnées $M'(-x; f(-x))$ c'est-à-dire $M'(-x; \pi - x)$. On remarque que le milieu de $[MM']$ est fixe, c'est le point A de coordonnées $A(0, \frac{\pi}{2})$. La courbe sur $[-1; 0]$ est donc l'image de la courbe sur $[0; 1]$ par la symétrie par rapport à A.

5. Montrons tout d'abord que $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = cos(3x)$.

$$\cos(3x) = Re\left(e^{3ix}\right) = Re\left((\cos(x) + i\sin(x))^3\right) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

Ainsi :

$$f(\cos(\theta)) = Arccos(4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)) = Arccos(\cos(3\theta))$$

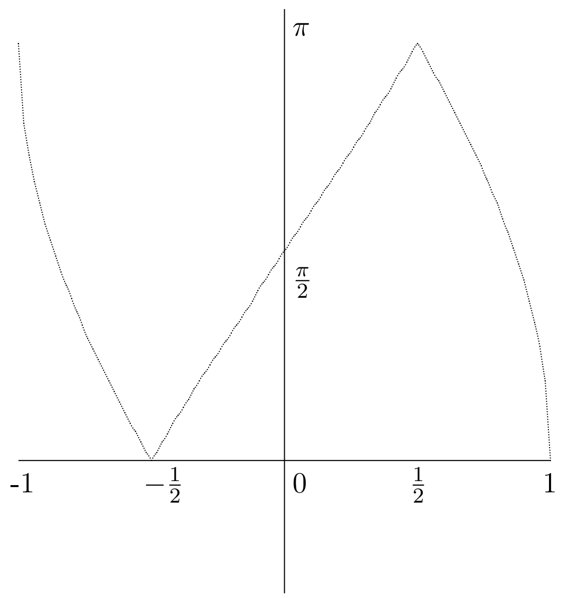
6.Discutons des solutions suivant la position de θ par rapport à $\dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{array}{lllll} \text{Si} \quad \theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right] & \text{alors} & 3\theta \in [0; \pi] & \text{et} & f(\cos(\theta)) = Arccos(cos(3\theta)) = 3\theta. \\ \text{Si} \quad \theta \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right] & \text{alors} & 2\pi - 3\theta \in [0; \pi] & \text{et} & f(\cos(\theta)) = Arccos(cos(2\pi - 3\theta)) = 2\pi - 3\theta. \end{array}$$

7.La fonction $Arccos$ est dérivable sur $]-1; 1[$, la fonction f est donc dérivable sur les x de $[0, 1]$ tels que $4x^3 - 3x$ soit différent de 1 et -1. Il faut donc que $P_1(x) \neq 0$ et $P_2(x) \neq 0$. Le domaine de dérivabilité est donc $\left[0; \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

8. $f'(x) = \dfrac{12x^2 - 3}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2}}$. Ainsi sur $[0, 1]$, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq \frac{1}{2}$.

9. Voila la courbe :



Chap 4

Fonctions usuelles

Devoir maison

Problème - Une formule de J. Machin

1. Montrer que :
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$
pour toutes les valeurs de x et y telles que les expressions précédentes aient un sens.
2. En déduire que :
$$\tan\left(4Arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{120}{119}$$
3. Puis montrer que
$$\tan\left(4Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$
4. En déduire (une formule de Machin) que :
$$4.Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$