Chapitre 1

Logique et ensemble.

Chap 1

Logique et ensemble.

Et s'il ne fallait retenir que cinq points ?

1. **Savoir utiliser les principaux modes de raisonnements.** A savoir le raisonnement déductif, la disjonction des cas, le raisonnement par contraposée, le raisonnement par l'absurde et le contre-exemple.

2. **Savoir montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre ($A \subset B$).** On part en général d'un élément x de A et on montre qu'il est dans B. La démonstration doit ressembler à :

$$x \in A \implies \dots \implies x \in B$$

3. **Savoir prendre la négation d'une proposition.** En particulier, le $\forall$ devient $\exists$, $\exists$ devient $\forall$, OU devient ET, ET devient OU et $P \implies Q$ devient P et $Non(Q)$.

4. **Connaître et savoir effectuer les différentes opérations/transformations possibles sur les ensembles** C'est-à-dire la réunion, l'intersection, le complémentaire, la différence symétrique, l'ensemble des parties.

5. **Savoir quand on peut donner une valeur à une variable.** On peut donner une valeur à une variable si elle se trouve dans la conclusion précédée de $\exists$ ou dans les hypothèses précédée de $\forall$.

Chap 1

Logique et ensemble.

Plan du cours

Chap 1

Logique et ensemble.

Questions de cours

1. Donner la table de vérité de la proposition : $Non(A \text{ et } B) \Longleftrightarrow Non(A) \text{ ou } Non(B)$. (I)
2. Comment montrer qu'une proposition $P \Longrightarrow Q$ est fausse ? (I)
3. Soit E un ensemble. Écrire la négation de la proposition $\forall x \in E,\ 0 \leq x < 1$. (I)
4. Donner un exemple ou $P \Longrightarrow Q$ est vrai mais $P \Longleftrightarrow Q$ est faux. (I)
5. Quelle différence y a-t-il entre les débuts des propositions : $\forall x,\ \exists y,\ \ldots$ et $\exists y,\ \forall x,\ \ldots$. (I)
6. Écrire la négation de la proposition : $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = x_0$. (I)
7. Expliquer quand on a le droit de donner une valeur à une variable dans une démonstration. (II)
8. Combien l'ensemble $\{\ \emptyset\ \}$ contient-il d'éléments ? Vous expliquerez votre réponse. (III)
9. Écrire en compréhension l'ensemble des nombres paires puis l'ensemble des nombres impairs. (III)
10. Montrer que $x = 12.9347347347\ldots$ est un nombre rationnel. Vous donnerez explicitement une fraction qui est égale à x. (III)
11. Déterminer si les propositions suivantes sont vrais ou fausses : (III)

    1) $\forall x \in \emptyset,\ x^2 < 0$ 2) $\exists x \in \emptyset,\ x^2 \geq 0$

12. Montrer que l'écriture décimale d'un nombre réel n'est pas unique. (III)
13. Montrer que $\cup$ est distributif par rapport à $\cap$. (IV)
14. On pose $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$. Déterminer $A \times B$, $B \times A$ et $(A \times B) \cap (B \times A)$. (IV)

Chap 1

Logique et ensemble.

Exercices types

Exercice 1 - Trouver la négation d'une proposition.

Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]a,b[,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
3. $\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ \exists q \in \mathbb{Z},\ \exists r \in \mathbb{Z},\ a = bq + r$ et $0 \leq r < b$
4. La suite (u_n) est croissante.

Exercice 2 - Quand a-t-on le droit de donner une valeur à une variable ?

1. Expliquer quand on a le droit de donner une valeur à une variable.
2. Soit $u_n = \frac{1}{n}$.
   a) On souhaite montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq \varepsilon$
      - Donner la liste des variables auxquelles on peut donner une valeur,
      - Puis donner un squelette de démonstration,
      - Enfin effectuer une preuve de la proposition.

   b) Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N},\ u_N \leq 10^{-5}$

Exercice 3 - Raisonnement par l'absurde et par contraposée

1. Rappeler le principe d'une démonstration par l'absurde, puis le principe d'une démonstration par contraposée. Vous donnerez les tautologies associées.
2. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Montrer par contraposée que pour tout entier naturel n, on a n^2 pair implique n pair.

Exercice 4 - Complémentaire d'une réunion, d'une intersection.

Soit E une un ensemble. Pour pour sous-ensemble X de E on note $\overline{X}$ son complémentaire dans E.

1. Soient A, B des sous-ensembles de E. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de E, montrer que

$$\overline{\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i} = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i}$$

3. Donner sans preuve les résultats similaires sur le complémentaire d'une intersection.

Chap 1

Logique et ensemble.

Exercices

"J'ai tendance à donner raison à ceux avec qui je suis d'accord."

G. Bedos.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Les connecteurs ET et OU sont associatifs, c'est-à-dire que

$$A\ et\ (B\ et\ C) \Longleftrightarrow (A\ et\ B)\ et\ C \qquad A\ ou\ (B\ ou\ C) \Longleftrightarrow (A\ ou\ B)\ ou\ C$$

2. Quand on écrit $A \Longrightarrow B$, cela signifie que pour avoir B, il faut avoir A.
3. Non(A ou B) $\Longleftrightarrow$ (Non(A) ou Non(B))
4. La négation de $A \Longrightarrow B$ est $Non(B) \Longrightarrow Non(A)$.
5. Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de x et y, alors : $\forall x, \exists y, P(x, y) \Longleftrightarrow \exists y \forall x, P(x, y)$
6. $x \in \bigcup_{i \in I} E_i \iff \exists i \in I,\ x \in E_i$
7. La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.
8. $A \setminus B \ = \ C_{A \cup B}^{B}$
9. La négation de "$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a < \varepsilon \Longrightarrow a = 0$" est : "$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a \geq \varepsilon\ et\ a = 0$".

Rep : 3 vraies / 6 fausses (VFFFFVFVF)

Niveau 1

Exercice 2.

On suppose l'ensemble $\mathbb{R}$ construit. Définir par une méthode d'écriture en compréhension les ensembles suivants : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres pairs, des nombres impairs, des nombres premiers.

Exercice 3.

Soient (x, y) dans $\mathbb{R}^2$. Ecrire les négations des propositions suivantes :
- $P_1 \, : \, 1 \leq x < y$
- $P_2 \, : \, x = 0$ ou $y = 0$
- $P_3 \, : \, x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$

Exercice 4.

1. Vérifier les tautologies suivantes :
   (a) $Non(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow [Non(P) \text{ et } Non(Q)]$
   (b) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow [Non(Q) \Longrightarrow Non(P)]$
   (c) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(Non(Q) \text{ et } P) \Longrightarrow Faux)]$
   (d) $Non(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(Non(Q) \text{ et } P)]$
2. Indiquer pour les tautologies b et c les modes de raisonnement qui sont associés.

Exercice 5.

Soit E_1 et E_2 des ensembles et F un sous-ensemble de E_1. Notons de plus par f et g des applications de E_1 dans E_2. Traduire les phrases suivantes en langage mathématique et écrire leur négation en langage mathématique puis en français.

1. Les éléments de E_1 ont tous des images par f différentes.
2. Les éléments de E_2 ont tous au moins un antécédent par f.
3. Les éléments de F ont la même image par f et par g.

Exercice 6.

Indiquer pour chacun des nombres suivants le plus petit ensemble de nombres (parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$) le contenant :

a) $\sqrt{3}$	b) $\sqrt{4}$	c) π	d) $3,7$	e) $\dfrac{1}{2}$	f) $\dfrac{1}{3}$
g) $\dfrac{4}{2}$	h) $-7,696969\ldots$	i) $3,14$	j) 10^{-99}	k) 10^{99}	l) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

Exercice 7.

Montrer que $\cup$ est distributif par rapport à $\cap$ puis que $\cap$ est distributif par rapport à $\cup$. En d'autres termes, montrer que pour tout ensemble E, F et G :

1. $E \cup (F \cap G) \; = \; (E \cup F) \cap (E \cup G)$
2. $E \cap (F \cup G) \; = \; (E \cap F) \cup (E \cap G)$

Ⓡ **Exercice 8.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.
2. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit strictement supérieur à 4.
3. Une condition suffisante pour qu'un réel soit strictement supérieur ou égal à 2, est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
4. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4
5. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1 est qu'il soit supérieur ou égal à 2.

Exercice 9.

Soit $E = \{7, 8\}$ et $F = \{7, 8, 9\}$.

1. Déterminer $E \times F$, $F \times E$, E^2, F^2.
2. Déterminer $G = (E \times F) \cap (F \times E)$.
3. G est-il inclus dans $E \times F$? dans $F \times E$? dans E^2 ? dans F^2 ?

Exercice 10.

Remplacer les points de suspension par le symbole $\in$ ou $\subset$:

a) $a \ldots \{a, b, c\}$	b) $\{a\} \ldots \{a, b, c\}$	c) $\{a\} \ldots \{\{a\}, b, c\}$
d) $\{b\} \ldots \{\{a\}, b, c\}$	e) $\emptyset \ldots \{a, b, c\}$	f) $\emptyset \ldots \{\emptyset\}$

Exercice 11.

Ecrire en "extension" le sous-ensemble de $[0, 20]$ ne contenant que des multiples de 3. Même question mais en "compréhension".

Exercice 12.

Soit $A = \{1; 2; 3; 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 0 \leq n \leq 4\}$ et $D = \{0, 2\}$ des ensembles.

1. Déterminer les ensembles $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $D \cup (A \cup B)$.
2. On pose $E = A \cap B$ et $F = B \cap D$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(D)$, $\mathcal{P}(F)$.

Exercice 13.

Déterminer si les expressions suivantes sont des propositions et si oui si elles sont vraies ou fausses :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x + y)^2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy$
2. Si A et B sont des ensembles : $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A$ ou B
3. Si P, Q et R sont des propositions : $[P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)] \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R]$

Niveau 2

Exercice 14.

Déterminer à l'aide de leur table de vérité tous les connecteurs logiques binaires, puis reconnaître les opérateurs ET, OU, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. Montrer enfin que l'on peut tous les définir en utilisant uniquement *Non* et *Et*.

Exercice 15.

Soient P_x et Q_x des propositions dépendant d'un paramètre x appartenant à E. Remplacer les ... par les symboles $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$. Aucune démonstration n'est demandée, par contre donner des contre-exemples dans le cas où une implication est fausse.

1. $(\forall x \in E,\ P_x \text{ et } Q_x) \quad \ldots \quad (\forall x \in E,\ P_x) \quad \text{et} \quad (\forall x \in E,\ Q_x)$
2. $(\exists x \in E,\ P_x \text{ et } Q_x) \quad \ldots \quad (\exists x \in E,\ P_x) \quad \text{et} \quad (\exists x \in E,\ Q_x)$
3. $(\forall x \in E,\ P_x \text{ ou } Q_x) \quad \ldots \quad (\forall x \in E,\ P_x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in E,\ Q_x)$
4. $(\exists x \in E,\ P_x \text{ ou } Q_x) \quad \ldots \quad (\exists x \in E,\ P_x) \quad \text{ou} \quad (\exists x \in E,\ Q_x)$

Ⓡ **Exercice 16.**

Ecrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice 17.

Soit E un ensemble et A,B,C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. A-t-on $(A \cup B) \subset (A \cup C) \Longrightarrow B \subset C$? $(A \cap B) \subset (A \cap C) \Longrightarrow B \subset C$?
2. Montrer que $\begin{cases} (A \cup B) \subset (A \cup C) \\ (A \cap B) \subset (A \cap C) \end{cases} \Longrightarrow B \subset C$
3. Quelle condition nécessaire et suffisante doivent vérifier A, B, C pour que l'on ait $B = C$ au lieu de $B \subset C$?

Niveau 3

Exercice 18.

Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. Pour cela, il faut raisonner par l'absurde. Notons E l'ensemble de tous les ensembles et A le sous-ensemble de E défini en compréhension par :

$$A = \{B \in E \ / \ B \notin B\}$$

l'ensemble A contient donc tous les ensembles ne se contenant pas eux-mêmes. Montrer que $A \in A \Longleftrightarrow A \notin A$, conclure.

Exercice 19.

On appelle *différence symétrique* entre deux éléments A et B de $\mathcal{P}(E)$, noté $A\Delta B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à l'un des ensembles A ou B sans appartenir à l'autre.

$$A\Delta B \;=\; \{x \in E \,/\, (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \;=\; (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Partie I. Propiétés de Δ.

1. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$ pour tous sous-ensembles A et B de E. On dit que Δ est commutatif.
2. Montrer qu'il existe un sous-ensemble N de E tel que : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta N = N\Delta A = A$. On dit que N est l'élément neutre pour Δ
3. Montrer que pour tout sous-ensemble A de E, il existe un sous-ensemble B de E vérifiant : $A\Delta B = B\Delta A = N$. On dit que A est inversible.
4. Soient A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer que :
$$A\Delta(B\Delta C) \;=\; (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$
5. En utilisant la symétrie de la relation précédente vis à vis des sous-ensembles A, B et C, montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ pour tous sous-ensembles A, B et C de E. On dit que Δ est associatif.

Coin de culture : un ensemble muni d'une opération ayant ces propriétés (c'est-à-dire commutativité, associativité, élément neutre, tout élément est inversible) est appelé un groupe commutatif.

Partie II. Δ et les autres lois sur $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que pour tous sous-ensembles A, B et C de E, on a : $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$. On dit que $\cap$ est distributif par rapport Δ.
2. Montrer que $\cup$ n'est pas distributif par rapport Δ.
3. Montrer que $\cap$ admet un élément neutre.
4. Montrer que $\cap$ est associative.
5. Quels sont les éléments inversibles de $\mathcal{P}(E)$ pour la loi $\cap$?

Coin de culture : un groupe commutatif muni d'une deuxième opération associative et ayant un élément neutre est appelé un anneau. Ainsi $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau.

Applications à d'autres disciplines

Exercice 20 - Microélectronique / Informatique - Les logigrammes.

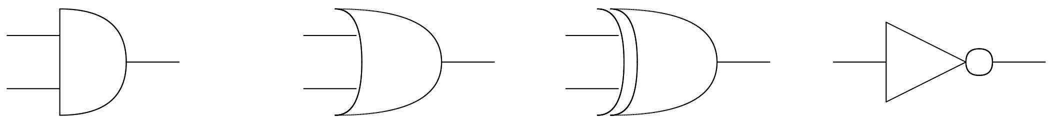
Partie I. Écriture d'un entier en base b. Soient n dans $\mathbb{N}$, b dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_p, a_{p-1}, \ldots, a_1, a_0$ dans $\{0, \ldots, b-1\}$. Alors $a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0$ est l'écriture de n en base b si et seulement si

$$n = a_0 + a_1.b + a_2.b^2 + \ldots + a_p b^p$$

Si n=2 (resp. 8,10,16) on dit que c'est l'écriture de n en binaire (resp. octale, décimale, hexadécimale).

1. Quel nombre représente l'écriture binaire 10101101 ?
2. Comment écrit-on 255 en binaire ?

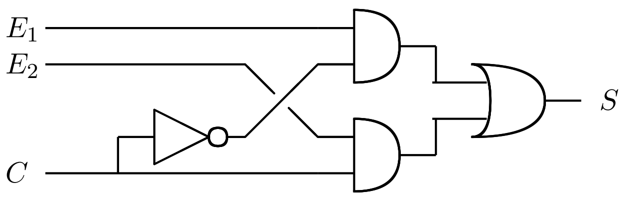
Partie II. Le logigramme. Le logigramme est la représentation graphique de propositions appelées les sorties construites à l'aide de connecteurs logiques et d'autres propositions appelées les entrées. Ainsi, les connecteurs principaux sont représentés par (notation anglosaxonne) :



Et Ou Ouex Non

Les "fils" de gauche sont les entrées et ceux de droite les sorties.

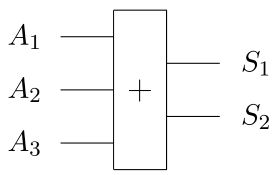
1. Par exemple la proposition S : (C et E_2) ou (Non C et E_1) est représentée par :



   Écrire la table de vérité de S.
2. Que réalise ce logigramme ? (C'est un multiplexeur 2 entrées)

Partie III. Un additionneur. Ici les propositions vraies seront notées 1 et les propositions fausses 0.

1. Soit A_1, A_2 et A_3 trois propositions. Écrire un logigramme effectuant la somme des 3 propositions ; le résultat étant donnée en binaire par S_2S_1. Vous vérifierez votre résultat à l'aide d'une table de vérité. Pour la suite, on notera ce logigramme par :



2. Si ce n'est pas le cas dans la question précédente, écrire un logigramme réalisant le même travail sans croisement de fils.
3. Soient $a_8a_7\dots a_1$ et $b_8b_7\dots b_1$ des écritures binaires de deux entiers. Écrire un logigramme permettant d'additionner ces entiers ; le résultat étant donné en binaire.

Compléments : à quoi ca sert ? Les logigrammes seront ensuite traduits pour faire des circuits imprimés. Les connecteurs de bases seront réalisés par des diodes et des transistors.

Chap 1

Logique et ensemble.

Quelques exercices corrigés

(R) **Exercice 8.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.
2. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit strictement supérieur à 4.
3. Une condition suffisante pour qu'un réel soit strictement supérieur ou égal à 2, est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
4. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4
5. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1 est qu'il soit supérieur ou égal à 2.

- -

Traduisons mathématiquement les propositions :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 4 \Longrightarrow x \geq 3$ 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \Longrightarrow x \geq 4$ 3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \Longrightarrow x \geq 2$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4 \Longrightarrow x \geq 2$ 5. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \Longleftrightarrow x > 1$

Les propositions 1 et 3 sont donc vraies, tandis que les autres sont fausses.

(R) **Exercice 16.**

Ecrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

- -

• L'ensemble $\emptyset$ contient un seul sous ensemble : $\emptyset$. Donc $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

• Cherchons à présent les sous ensembles de $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Cet ensemble ne contient qu'un élément, il est du type $\{a\}$. Or les sous ensembles de $\{a\}$ sont les ensembles : $\emptyset$, $\{a\}$. Ainsi, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

• Il reste à trouver les sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}\left(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right)$. Cet ensemble contient deux éléments, il est donc du type $\{a; b\}$. Or les sous ensembles de $\{a; b\}$ sont les ensembles : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a; b\}$. Ainsi, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Chap 1

Logique et ensemble.

Devoir maison

Problème - De mesure extérieure à mesure - Partie I.

Soit X un ensemble et μ une application de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} E_1 \ : & \mu(\emptyset) = 0 \\ E_2 \ : & \forall A, B \in \mathcal{P}(X),\ \ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \\ E_3 \ : & \forall A, B \in \mathcal{P}(X),\ \ \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \end{array}$$

De plus, pour tout A de $\mathcal{P}(X)$, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans X. Enfin l'ensemble $\mathcal{A}$ désignera :

$$\mathcal{A} \ = \ \big\{ A \subset X \ / \ \forall B \in \mathcal{P}(X),\ \mu(A \cap B) + \mu(\overline{A} \cap B) = \mu(B) \big\}$$

Partie I. Généralités

1. Montrer que $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire.

Partie II. Stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection. Soient A et B dans $\mathcal{A}$ et D dans $\mathcal{P}(X)$.

1. Montrer que : $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A \cap B}$.
2. Montrer que : $\mu(A \cap \overline{B} \cap D) + \mu(\overline{A} \cap B \cap D) + \mu(\overline{A} \cap \overline{B} \cap D) + \mu(A \cap B \cap D) = \mu(D)$
3. En déduire que : $\mu(A \cap B \cap D) + \mu(\overline{A \cap B} \cap D) \leq \mu(D)$
4. Montrer que $D = (A \cap B \cap D) \cup (\overline{A \cap B} \cap D)$. En déduire que $A \cap B$ est dans $\mathcal{A}$.

Partie III. Mesure extérieure.

1. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. En utilisant le théorème des limites monotones, montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Cette limite est notée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$
2. On suppose à présent que μ est une application de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant E_1, E_2 et :

   $$E_3^* \ : \ \ \text{Pour toute suite } (A_k) \text{ de sous ensembles de } X \text{ on a : } \ \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$$

   Montrer que μ vérifie la propriété E_3. Une telle application μ est appelée une mesure extérieure.

La partie II (plus tard) montrera qu'une mesure extérieure restreinte à $\mathcal{A}$ est une mesure c'est-à-dire vérifie E_3^* avec une égalité et une suite (A_k) d'ensembles disjoints.