

Chapitre 15

Espaces vectoriels.

1	Points importants		
2	Plan du cours		
3	Questions de cours	6	Exercices corrigés
4	Exercices types	7	Devoir maison
5	Exercices		

Espaces vectoriels.

Et s'il ne fallait retenir que sept points ?

1. Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ F \subset E \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in k, \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

Bien comprendre que lorsqu'on demande de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on essaie de l'exprimer comme un sous-espace vectoriel d'un "gros" k espace vectoriel. Ceci présuppose que vous ayez en tête une liste de "gros" k espace vectoriel comme :

- $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ ou plus généralement $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot, \times, \cdot)$ où E est un ensemble et F un k espace vectoriel,
- $(k[X], +, \cdot)$ et ses sous-espaces vectoriels les plus connus $(k_n[X], +, \cdot)$
- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$
- k lui-même peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même (ou sur un corps plus petit). La loi externe est donnée par la multiplication dans le corps. Ainsi par exemple $\mathbb{R}$ est un Q -ev (et aussi un $\mathbb{R}$ -ev), mais pas un $\mathbb{C}$ -ev.
- k^n est un k -ev (donc par exemple $\mathbb{R}^n$) ou plus généralement $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ si les E_i sont des k -espaces vectoriels.

2. Savoir calculer un espace vectoriel engendré.

Si A est un sous-ensemble d'un k espace vectoriel k alors $Vect(A)$ est :

- le plus petit sous-espace vectoriel contenant A
- l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant A
- l'ensemble des combinaisons linéaires de A , si A est non vide

On remarquera que $vect(E) = E$ si E est un espace vectoriel, et donc que $vect(vect(A)) = vect(A)$ si A est un ensemble

3. La somme / somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des sev de E alors la somme $E_1 + \dots + E_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid \forall i, x_i \in E_i\}$ est encore un sev de E . La somme est directe et on note $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ si l'un des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- Tout élément de $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ se décompose de manière unique en $x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in E_i$
- Si $x_1 + \dots + x_n = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $x_i = 0$ (c'est-à-dire que le vecteur nul se décompose de façon unique dans $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$)
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (E_1 + \dots + E_{i-1} + E_{i+1} + \dots + E_n) \cap E_i = \{0\}$

On remarquera **surtout** la traduction de la troisième ligne dans le cas où $n = 2$. Ainsi la somme $E + F$ est directe si et seulement si $E \cap F = \{0\}$. Enfin si $E = F \oplus G$ alors on dit que F est un supplémentaire de G dans E .

4. Caractérisation des projecteurs et des symétries.

Soit E un espace vectoriel,

$$p \text{ projection} \iff \begin{cases} p \in \mathcal{L}(E) \\ p \circ p = p \end{cases} \quad s \text{ symétrie} \iff \begin{cases} s \in \mathcal{L}(E) \\ s \circ s = Id \end{cases}$$

De plus, une projection p est toujours une projection sur $Im(p)$ et de direction $Ker(p)$ et une symétrie s est toujours une symétrie par rapport à $Ker(s - Id)$ et de direction $Ker(s + Id)$, ce qui impose $E = Ker(p) \oplus Im(p) = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$

5. Les isomorphismes d'espaces vectoriels.

Les isomorphismes d'espaces vectoriels sont exactement les applications linéaires bijectives. En effet, si f est linéaire et bijective alors f^{-1} est encore une application linéaire. Se souvenir également que l'ensemble des automorphismes (=Isomorphisme+Endomorphisme) sur E muni de la composition est un groupe appelé le groupe linéaire et noté $(Gl(E), \circ)$.

6. Noyau et image d'une application linéaire.

L'image et la préimage de sev par une application linéaire est encore un sev. Ainsi, si $f : E \mapsto F$ est une application linéaire, le noyau $Ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ et l'image $Im(f) = f(E)$ sont des sev respectivement de E et F . On a :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff Ker(f) = \{0\} \\ f \text{ surjective} &\iff Im(f) = F \end{aligned}$$

A noter que la caractérisation de f surjective est encore vraie si f n'est pas linéaire.

7. Familles libres, liées, génératrices et bases.

Outre les définitions et les propriétés élémentaires, il faut également se souvenir du comportement de telles familles vis à vis des applications. Ainsi, L'image d'une famille

- | | | | |
|---------------|---------------------|------------|-----------------|
| • libre | par une application | injective | est libre |
| • liée | par une application | | est liée |
| • génératrice | par une application | surjective | est génératrice |
| • base | par une application | bijective | est une base |

I. Objets / Morphismes : Espaces vectoriels / Applications linéaires	2
1/ Définition	2
2/ Exemples	2
3/ Règles de calculs	3
4/ Applications linéaires	3
5/ Exemples d'applications linéaires	4
II. Sous-objets : Sous espaces vectoriels	4
1/ Théorème de caractérisation	4
2/ Exemples	5
3/ Noyau / Image d'une application linéaire	6
4/ Intersection de sev	6
5/ Sev engendrés par une partie, exemples	7
III. Produits et sommes d'espaces vectoriels	8
1/ Produits	8
2/ Somme	9
3/ Somme directe	9
4/ Supplémentaire d'espaces vectoriels	10
IV. Projections - symétries	11
1/ Projections / Projecteurs	11
2/ Symétries / Involutions	11
3/ Liens entre projections et symétries	12
4/ Exemples de projections et de symétries	12
5/ Polynômes annulateurs	12
6/ Exemples de projections et de symétries	13
V. Famille libre, liée, génératrice, base	13
1/ Cas des familles finies	13
2/ Exemples 1 : dans $\mathbb{R}^n$	13
3/ Exemples 2 : familles de polynômes	14
4/ Exemples 3 : familles de sinus et cosinus	14
5/ Exemples 4 : d'autres exemples	14
6/ Cas des familles infinies	15
7/ Propriétés des familles libres/liées/génératrices	15
8/ Quelques exercices importants	16

1. Rappeler la définition d'un k -espace vectoriel puis d'une application linéaire. Donner également 3 exemples de chaque. (I)
2. Donner la définition du groupe linéaire $Gl(E)$. Pourquoi n'est-ce pas un k -espace vectoriel ? (I)
3. Donner sans preuve la liste des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. (I)
4. Rappeler la définition de l'espace vectoriel engendré par une partie, puis montrer que si F est un espace vectoriel, alors $Vect(F) = F$. (II)
5. Donner le théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels. Montrer que l'ensemble des polynômes ayant 2 pour racine est un sev de $\mathbb{R}[X]$. (II)
6. Notons P et I l'ensemble des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que P et I sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$. (III)
7. Notons S_n et A_n respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A_n et S_n sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_n \oplus S_n$. (III)
8. On désigne par (P) l'ensemble des multiples du polynôme P . Montrer que si $deg(P) = n$ alors $\mathbb{R}[X] = (P) \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (III)
9. Soient p un projecteur et s une involution linéaire. Montrer que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ et $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + id)$. (IV)
10. Montrer que si F_1, F_2 et F_3 sont des espaces vectoriels tels que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ alors la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas forcément directe. (IV)
11. A quelle condition sur l'application linéaire f , l'image par f d'une famille libre est-elle libre ? l'image par f d'une famille liée est-elle liée ? l'image par f d'une famille génératrice est-elle génératrice ? (V)
12. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E . Montrer que la famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. (V)

Exercice 1 - Savoir montrer qu'une famille est libre.

Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{u}(1, 2, 3, 4)$, $\vec{v}(1, 3, 1, 1)$ et $\vec{w}(1, 2, 4, 4)$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. (u, v, w) avec $u_n = 2^n$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
3. (P, Q, R) avec $P = X^2 + 1$, $Q = X^2 + X + 1$ et $R = X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
4. (f, g, h) avec $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$ et $h(x) = x^2$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. $(P_0, \dots, P_n)$ avec $P_k = (X + 1)^k$ pour tout k de $\{0, \dots, n\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.
6. $(c_0, \dots, c_n)$ avec $c_k(x) = \cos(kx)$ pour tout k de $\{0, \dots, n\}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2 - Exemples classiques de projections et symétries.

Considérons les applications p et s suivantes :

$$\begin{array}{ccc} p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \frac{1}{2}({}^t A + A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} s : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} p(f) : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(-x) \end{array} \right) \end{array}$$

1. Montrer que p est un projecteur et s une involution linéaire.
2. En déduire des décompositions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en somme directe.
3. En déduire que p et s sont respectivement des projections et des symétries. Vous donner les caractéristiques de ces objets.
4. Déterminer la symétrie associée à p et la projection associée à s .

Exercice 3 - Savoir montrer qu'une application linéaire est injective (ou non).

Déterminer si les applications linéaires suivantes sont injectives :

1. f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (x + y, x - z)$
2. f de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = P' + P$
3. f de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ définie par : $f(u)_0 = 0$ et $f(u)_{n+1} = u_n$.
4. ϕ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ définie par : $\phi(f)(x) = \int_a^x f$.

Il a un côté sympathique, seulement on le voit toujours de face.

F. Dard.

Vrai - Faux

Exercice 1.

E désigne ici un K -ev, et u un endomorphisme de E . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si les vecteurs x, y, z de E sont deux à deux non colinéaires alors la famille (x, y, z) est libre.
2. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . Si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres, alors la famille est libre.
3. (x, y) est libre si y n'est pas un multiple de x .
4. Si x_p n'est pas combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_{p-1})$ alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
5. Soit D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles 2 à 2 distinctes de $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ est alors somme directe de D_1, D_2, D_3 .
6. $F \setminus E$ est un supplémentaire de F dans E .
7. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$, et $F = \text{vect}\{e_1, e_2\}$. Alors $\text{vect}\{e_3, e_4\}$ est un supplémentaire de F .
8. Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos^2(x)$, $x \mapsto \sin^2(x)$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
9. Si $E = F + G$ alors $F = E - G = \{x - y \mid x \in E, y \in G\}$.
10. La famille $(1, ch, sh)$ est liée car $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) - 1 = 0$.
11. $\text{Vect}\{a, b, c\} \subset \text{Vect}\{a, b, c, d\}$.
12. $\text{Vect}(\emptyset) = \emptyset$
13. Toute linéaire est un morphisme de groupes additifs.
14. Soient f, g et h trois applications linéaires telles que les expressions suivantes aient un sens. On a alors : $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
15. Les familles $(x, y, x + y)$ et $(x, y, -x)$ sont liées.
16. $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si tout élément de E se décompose comme une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.
17. L'image d'une famille libre par une application linéaire est libre.

Niveau 1

Exercice 2.

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $K_3[X]$ où

- $P_1 = X^3 + X$, $P_2 = X^2 + X$, $P_3 = 1$ et $P_4 = X + 1$.
- $P_1 = X^2 + X$, $P_2 = X^3 + X^2$, $P_3 = 1$ et $P_4 = X^3$.

© Exercice 3.

Les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-elles des sev ?

1. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ paire}\}$
2. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ impaire}\}$
3. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ croissante}\}$
4. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ monotone}\}$

Exercice 4.

Soit α et β dans $\mathbb{C}$. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^4$:

$$x_1 = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) \quad x_2 = (\alpha, -\alpha, \beta, \beta) \quad x_3 = (\beta, \beta, \alpha, \alpha) \quad x_4 = (\beta, -\beta, \alpha, \alpha) \quad x_5 = (1, 1, 1, 1)$$

1. Trouver une relation de liaison non triviale entre ces vecteurs. La famille $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est-elle libre ?
2. Peut-on choisir (α, β) pour que la famille (x_1, x_2, x_3, x_4) soit une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

Exercice 5.

Soit E un k -ev, u un endomorphisme de E et P un polynôme sur K de valuation nulle vérifiant $P(u) = 0$.

1. Montrer que u est bijective et donner l'expression de u^{-1} .
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u .

© Exercice 6.

Montrer que $A \cup B$ est un sev si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$

Exercice 7.

1. Trouver dans $\mathbb{R}^3$ une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par $(1, 1, 2)$ et $(-1, 2, 3)$. Donner un supplémentaire.
2. Trouver un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$. Donner un supplémentaire.

Exercice 8.

Soit P non nul dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que (P) l'ensemble des multiples de P est un sev de $\mathbb{R}[X]$. Trouver un supplémentaire de ce sev.

Exercice 9.

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\alpha_1 = (1, 2, -1)$, $\alpha_1 = (3, 1, 4)$ et $\alpha_1 = (2, 2, 2)$ sont-ils libres ou liés ?

Niveau 2

Exercice 10.

Soit f et g des endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$ alors $\begin{cases} f(\text{Ker } g) \subset \text{Ker } g \\ f(\text{Im } g) \subset \text{Im } g \end{cases}$

Exercice 11.

Montrer que la famille :

1. $(1, X, X^2, \dots)$ est libre dans $k[X]$
2. $(P_0, P_1, \dots)$ est libre dans $k[X]$ avec $\deg(P_i) = i$.
3. $(x \rightarrow e^{nx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. $(x \rightarrow e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. $(x \rightarrow \cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. $(x \rightarrow \sin nx)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. $(x \rightarrow \cos nx)_{n \in \mathbb{Z}}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
8. $(x \rightarrow \sin nx)_{n \in \mathbb{Z}}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
9. $(x \rightarrow \cos nx)_{n \in \mathbb{Z}} \cup (x \rightarrow \sin nx)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
10. $(x \mapsto f(x-a))_{a \in \mathbb{R}}$ où f non dérivable (resp. continue) en 0 et dérivable (resp. continue) ailleurs est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ex : $|x-a|$).
11. $(x \rightarrow x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ avec $x \geq a > 0$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
12. $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur le $\mathbb{Q}$ -ev $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Donner un supplémentaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On identifie les polynômes et les fonctions polynômes.

Exercice 13.

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels différents et f_i les formes linéaires de $\mathbb{R}[X]$, pour i dans $\{0, \dots, n\}$, définies par $f_i(P) = P(a_i)$. Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 14.

Pour tout k de $\{0, \dots, n\}$ Soient ϕ_k les formes linéaires définies de $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Exercice 15.

Soit E un k espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On définit à présent e_k^* la forme linéaire sur E par : $e_k^*(e_l) = \delta_{kl}$. Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $E^* = \mathcal{L}(E, k)$.

Niveau 3

Exercice 16 - Lemme de Schur.

Soit E un K -ev et f un endomorphisme de E

1. Montrer que f est une homothétie si et seulement si $\forall x \in E, (x, f(x))$ est lié. Autre formulation : f est une homothétie si et seulement si toute droite vectorielle est stable par f .
2. Montrer que le centre de l'algèbre $\mathcal{L}(E) : Z(\mathcal{L}(E)) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$ est formé des homothéties.
3. Montrer que le commutant de $Gl(E)$ dans $\mathcal{L}(E) : Z(\mathcal{L}(E)) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \forall v \in Gl(E)(E), u \circ v = v \circ u\}$ est formé des homothéties.

Ⓡ Exercice 17 - Ker(f) et Im(f) sont-ils supplémentaires ?.

Soit E un k -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que si f est une projection alors $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. Le morphisme f est à présent quelconque, montrer que

$$\begin{aligned} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} &\iff Ker(f) = Ker(f^2) \\ E = Ker(f) + Im(f) &\iff Im(f) = Im(f^2) \end{aligned}$$

3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Montrer que :

$$Ker(f) = Ker(f^2) \iff Im(f) = Im(f^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Ⓡ Exercice 17 - Ker(f) et Im(f) sont-ils supplémentaires ?.

Soit E un k -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que si f est une projection alors $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. Le morphisme f est à présent quelconque, montrer que

$$\begin{aligned} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} &\iff Ker(f) = Ker(f^2) \\ E = Ker(f) + Im(f) &\iff Im(f) = Im(f^2) \end{aligned}$$

3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Montrer que :

$$Ker(f) = Ker(f^2) \iff Im(f) = Im(f^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

-
1. Montrons tout d'abord que $Ker(f) \oplus Im(f) :$

$$x \in Ker(f) \cap Im(f) \implies \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists x' \in E, x = f(x') \end{cases} \implies \exists x' \in E, \begin{cases} f(f(x')) = 0 \\ x = f(x') \end{cases}$$

Or $f \circ f = f$ car f est une projection, on a donc :

$$x \in Ker(f) \cap Im(f) \implies \exists x' \in E, \begin{cases} f(x') = 0 \\ x = f(x') \end{cases} \implies x = 0$$

La somme est donc bien directe. Montrons à présent que $E = Ker(f) + Im(f)$. L'inclusion $\supset$ étant évidente, montrons simplement $\subset$. Pour cela il suffit de voir que tout x de E se décompose en :

$$x = (x - f(x)) + f(x)$$

où $f(x)$ est dans $Im(f)$ par définition de l'image et $x - p(x)$ est dans $Ker(f)$ car :

$$f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

2. Décomposons sens directs, réciproques ce qui fait 4 étapes :

Etape 1 : $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \implies Ker(f) = Ker(f^2)$

$$x \in Ker(f) \implies f(x) = 0 \implies f(f(x)) = f(0) = 0 \implies x \in Ker(f^2)$$

On a donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et ceci sans utiliser l'hypothèse. De plus :

$$x \in \text{Ker}(f^2) \implies f(f(x)) = 0 \implies \begin{cases} f(x) \in \text{Im}(f) \\ f(x) \in \text{Ker}(f) \end{cases}$$

Or $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, donc $f(x) = 0$ et x est dans $\text{Ker}(f)$. On a donc montré que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Etape 2 : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

Comme $\{0\} \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ est évident, montrons l'inclusion inverse :

$$x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \implies \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists x' \in E, x = f(x') \end{cases} \implies \exists x' \in E, \begin{cases} x' \in \text{Ker}(f^2) \\ x = f(x') \end{cases}$$

Or $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, on a donc :

$$x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \implies \exists x' \in E, \begin{cases} x' \in \text{Ker}(f) \\ x = f(x') \end{cases} \implies x = 0$$

Etape 3 : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$

$$y \in \text{Im}(f^2) \implies \exists x \in E, y = f(f(x)) \implies \exists X \in E, y = f(X) \text{ et } X = f(x) \implies y \in \text{Im}(f)$$

On a donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ et ceci sans utiliser l'hypothèse comme précédemment pour les noyaux. De plus si y est dans $\text{Im}(f)$, il existe x dans E tel que $y = f(x)$. Or $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, donc x se décompose en $x = x_1 + f(x_2)$ où x_1 est dans $\text{Ker}(f)$. On a donc $y = f(x) = f(x_1) + f(f(x_2)) = f(f(x_2))$ et y est dans $\text{Im}(f^2)$.

Etape 4 : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$

L'inclusion $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset E$ étant évidente, concentrons nous sur l'inclusion inverse. Soit x dans E , on a donc $f(x)$ dans $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Il existe donc x' tel que $f(f(x')) = f(x)$. Décomposons alors x sous la forme :

$$x = (x - f(x')) + f(x')$$

On a clairement $f(x')$ dans $\text{Im}(f)$. De plus $f(x - f(x')) = f(x) - f(f(x')) = f(x) - f(x) = 0$, donc $x - f(x')$ est dans $\text{Ker}(f)$. On a donc $E \subset \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$

3. D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2)) &\iff \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f^2)) \\ &\iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2)) \end{aligned}$$

Donc si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ on a :

$$\begin{cases} \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f) \\ \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Im}(f)) \end{cases}$$

On a donc $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$. La réciproque se traite de la même façon. On a donc en dimension finie :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \iff \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \iff \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$$

Problème - Polynôme minimal d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P = a_0 + a_1.X + \dots + a_n.X^n$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P(u)$ l'endomorphisme

$$P(u) = a_0 Id + a_1.u + \dots + a_n.u^n$$

où $u^k = u \circ u \circ \dots \circ u$ (k fois). Enfin P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0$

1. Montrer que l'ensemble A des polynômes annulateurs de u est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Considérons l'ensemble $B = \{\text{Deg}(P) \in \mathbb{N} / P \in A \setminus \{0\}\}$. On admettra que B est non vide. Montrer que B admet un minimum n_0
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_0 dans A de degré n_0 . On l'appelle le polynôme minimal de u .
4. Montrer que tout polynôme multiple de P_0 (c'est-à-dire de la forme QP_0 avec Q dans $\mathbb{R}[X]$) est dans A .
5. Soit P un polynôme de A . En effectuant la division euclidienne de P par P_0 , montrer que P est un multiple de P_0
6. En déduire que $A = \{P_0Q / Q \in \mathbb{R}[X]\}$.