Chapitre 3

Nombres complexes.

Chap 3

Nombres complexes.

Et s'il ne fallait retenir que cinq points ?

1. **Connaître la définition d'un groupe et d'un morphisme de groupes ainsi que des exemples.** Les exemples classiques : $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(S^1,\times)$, $(R_n,\times)$, $(R_\infty,\times)$ …

2. **Connaître les propriétés concernant les parties réelle et imaginaire, le conjugué, le module.** On a entre autres, pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ et tout λ, μ de $\mathbb{R}$:
   a) $Re(\lambda.z_1+\mu.z_2)=\lambda.Re(z_1)+\mu.Re(z_2)$, $\quad Im(\lambda.z_1+\mu.z_2)=\lambda.Im(z_1)+\mu.Im(z_2)$
   b) $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\quad \overline{\lambda.z_1}=\lambda.\overline{z_1}$, $\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
   c) $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$, $\quad z_1.\overline{z_1}=|z_1|^2$
   d) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ (Inégalité triangulaire)

3. **Connaître la définition de l'exponentielle complexe et ses principales propriétés.** On définit l'exponentielle complexe par $e^{x+iy}=e^x.(\cos(y)+i\sin(y))$. De plus, il vérifie :
   a) $e^z.e^{z'}=e^{z+z'}$
   b) $\cos(x)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin(x)=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ (Formules d'Euler)
   c) $\left(e^{ix}\right)^n=\left(e^{inx}\right)$ (Formule de Moivre)

4. **Savoir écrire la forme polaire de la somme ou de la différence de 2 nombres complexes de module 1.** Il faut mettre en facteur e^{im} ou m est la moyenne des arguments des 2 nombres complexes.

5. **Les Racines n$^{\text{ième}}$ de 1.** L'ensemble des racines n$^{\text{ième}}$ de 1 est noté R_n. C'est un groupe pour la multiplication, et contient n éléments. De plus, les points représentant les racines n$^{\text{ième}}$ forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre 0 et de rayon 1. On a :

$$\begin{aligned} R_n &= \{z\in\mathbb{C}\ /\ z^n=1\} \\ &= \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\in\mathbb{C}\ /\ k\in\{0,\ldots,n-1\}\} \\ &= \{\alpha^k\in\mathbb{C}\ /\ k\in\{0,\ldots,n-1\}\} \text{ avec } \alpha=e^{\frac{2i\pi}{n}} \end{aligned}$$

6. **Les Racines n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe quelconque a.** Leur ensemble est noté $R_n(a)$. Il existe n racines n$^{\text{ième}}$ et leurs représentations géométriques forment aussi un polygone régulier. Cependant $R_n(a)$ n'est **PAS** en général un groupe. Enfin si $re^{i\theta}$ est la décomposition polaire de a, on a :

$$\begin{aligned} R_n(a) &= \{z\in\mathbb{C}\ /\ z^n=a\} \\ &= \{\sqrt[n]{r}e^{\frac{2ik\pi+i\theta}{n}}\in\mathbb{C}\ /\ k\in\{0,\ldots,n-1\}\} \\ &= \{z_0\alpha\in\mathbb{C}\ /\ \alpha\in R_n\} \text{ où } z_0 \text{ est une racine n}^{\text{ième}} \text{ de } a \end{aligned}$$

7. **Savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.** Attention à ne pas écrire $\sqrt{\Delta}$ avec Δ complexe.

8. **Connaître les formules trigonométriques.** En particulier, il est impératif de connaître les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\tan 2x$, et de savoir exprimer $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$, $\tan(\theta)$ et $e^{i\theta}$ à l'aide de $tan(\theta/2)$

9. **Savoir linéariser et factoriser des expressions trigonométriques.** En particulier savoir linéariser $\cos^m(x)\sin^n(x)$.

Nombres complexes.

Plan du cours

Nombres complexes.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une LCI commutative, d'une LCI associative, d'une LCI distributive par rapport à une autre, d'un élément neutre pour une LCI, d'un élément inversible pour une LCI. (I)
2. Donner la définition d'un groupe et deux exemples de groupes. (I)
3. Donner la définition d'un morphisme de groupe et deux exemples. (I)
4. Rappeler les formules d'Euler et de Moivre. (I)
5. Montrer que pour tous nombres complexes z et z', on a : $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(z.\overline{z'})$ (I)
6. Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe. (I)
7. Montrer que pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on a : (I)

$$||z_1| - |z_2|| \;\leq\; |z_1 + z_2| \;\leq\; |z_1| + |z_2|$$

8. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. (II)
9. Soit a dans $\mathbb{C}^*$. Résoudre $e^z = a$. (II)
10. Donner la forme des racines n^ième de 1. (III)
11. Donner la forme des racines n^ième d'un nombre complexe non nul a. (III)
12. Donner la décomposition polaire de -2, $1+i$ et $-1+i\sqrt{3}$. (III)
13. Donner les racines carrées de $4+3i$. (III)
14. Donner les racines cubiques et quatrièmes de 1. (III)
15. Rappeler les formules trigonométriques de $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$ ainsi qu'un moyen de les retrouver. (IV)
16. Linéariser $\cos^3(x)\sin^2(x)$. (IV)
17. Soit a dans $\mathbb{C}^*$. Résoudre pour tout n de $\mathbb{N}$ l'équation $z^n = a^n$ (IV)
18. Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $tan(\frac{x}{2})$. Une preuve est demandée. (IV)
19. Donner les formules trigonométriques de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$. Vous donnerez également une méthode pour les retrouver. (IV)
20. Donner les formules trigonométriques de $\cos(p)+\cos(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$, $\sin(p)-\sin(q)$. Vous donnerez également une méthode pour les retrouver. (IV)
21. Exprimer $tan(6x)$ en fonction de $tan(x)$. (IV)

Nombres complexes.

Exercices types

Exercice 1 - Somme de deux termes de module 1.

1. Mettre $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$ et $e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}$ sous la forme $re^{i\theta}$ avec r et θ dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire les formules de $\cos(px)+\cos(qx)$ et $\cos(px)-\cos(qx)$.
3. Soit θ dans $[0;\frac{\pi}{2}[$. Déterminer la forme polaire de $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$

Exercice 2 - les 3 façons de montrer qu'un nombre est réel ou imaginaire pur.

1. Montrer que $(1+i\sqrt{2})^2-(i+\sqrt{2})^2$ est un nombre réel.
2. Montrer que $(1+i)^n$ est réel si et seulement si n est un multiple de 4.
3. Soit z_1 et z_2 dans $\mathbb{U}$ tels que $z_1z_2\neq -1$. Montrer que $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un nombre réel.

Exercice 3 - Somme de cosinus et sinus.

1) Résoudre : $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=1$ 2) Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

Exercice 4 - Résolution d'équations.

1) $z^n=-2$ 2) $z^6+(1-i)z^3-i=0$ 3) $(z-i)^n=(z+i)^n$

Exercice 5 - Les racines n$^{\text{ième}}$.

Soit a dans $\mathbb{C}^*$.

1. Montrer que si α est une solution de $z^n=a$ alors les solutions de $z^n=a$ sont de la forme $\alpha.\omega^k$ avec k dans $\{0,\dots,n-1\}$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$
2. Déterminer la somme et le produit des racines n$^{\text{ième}}$ de a.
3. Montrer que $(\mathbb{U}_n,\times)$ est un groupe, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
4. On pose $\mathbb{U}_\infty=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$. Montrer que $(\mathbb{U}_\infty,\times)$ est un groupe.

Exercice 6 - Les polynômes de Tchbitchev.

1. Exprimer $cos(5x)$ en fonction de $cos(x)$.
2. On définit le n$^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebitchev par $T_n(\cos(x))=\cos(nx)$. Montrer que
$$T_n=\sum_{k=0}^{Ent(n/2)}(-1)^kC_n^{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k$$
3. On suppose que pour n fixé, ce polynôme unique. Montrer que l'on a l'équation de récurrence $T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$

Nombres complexes.

Exercices

"Il ne faut jamais remettre à demain ce que l'on peut faire à quatre mains."

P. Perret.

Vrai ou Faux ?

Exercice 1.

Dans toutes les propositions suivantes z et z' désigneront des nombres complexes quelconques, E un ensemble, $*$ une LCI sur E. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $|z|=z.\overline{z}$.
2. Si $Z=\dfrac{z+3+2i}{4i-z^2+|z|}$ alors $\overline{Z}=\dfrac{\overline{z}+3-2i}{-4i-\overline{z}^2+|z|}$
3. $|z|-|z'|\leq|z+z'|$.
4. $z-\overline{z}=2.Im(z)$.
5. $2i\sin(\theta)=e^{-i\theta}-e^{i\theta}$.
6. Les racines cubiques de l'unité sont 1, j, j^2.
7. Les solutions d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ sont soit réelles, soit conjuguées.
8. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe pour la multiplication.
9. Soient x et y dans $\mathbb{C}$ tels que $z=x+iy$, alors $Im(z)=y$.
10. $Arg(z)$ est défini si et seulement si $z\neq 0$.
11. L'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul est un groupe pour la multiplication.
12. L'élément x de E est inversible si et seulement s'il existe y dans E tel que $x*y=e$.

Rep : 6 fausses / 6 vraies (FVVFFVVVFVFF)

Niveau 1

Exercice 2.

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on pose $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$.

1. Montrer que si $|z| = 1$ alors $Z \in i\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $|Z| = 1$ alors $z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Montrer que $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1.z_2}$ est réel pour tout nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 vérifiant $z_1 z_2 \neq -1$.

Exercice 4.

1. Quelle est la forme polaire de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ et $e^{i\theta} - e^{i\theta'}$?
2. En déduire la forme polaire de $1 + e^{i\theta}$.

Exercice 5.

Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w^{kp}$ avec $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Exercice 6.

Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe :

$$Z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$$

En déduire Z^3

Exercice 7.

A quelle condition nécessaire et suffisante sur les arguments le produit de deux nombres complexes est-il réel (resp. imaginaire pur) ?

Ⓡ Exercice 8.

Montrer que pour tout couple (z, z') de nombres complexes, on a :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En déduire que si $|z| \leq k \leq 1$ pour un certain k de $\mathbb{R}$ alors

$$1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$$

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z - i)^n = (z + i)^n$.

Ⓡ Exercice 10.

Montrer qu'un nombre complexe est réel si et seulement si $|z - i| = |z + i|$.

Exercice 11.

Déterminer les racines cinquième de $-i$, les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 12.

Soit P une fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficient dans $\mathbb{R}$ (i.e. f est sous la forme $f(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ avec $a_0, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que si z est racine de P alors $\overline{z}$ est également racine.

Exercice 13.

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(x + y)\cos(y) + \sin(x + y)\sin(y)$
2. $\sin(x - y)\cos(y) + \cos(x - y)\sin(y)$
3. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)}$
4. $\dfrac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$

Exercice 14.

Linéariser $\cos^3(x)$, $\sin^4(x)$, $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

Ⓒ Exercice 15.

Résoudre :

1. $z^2 + iz + 3i + 1 = 0$
2. $z^4 + iz^2 + 3i + 1 = 0$

Ⓡ Exercice 16.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2 - i)z^2 - (7 - 6i)z + 11 - 3i = 0$

Exercice 17.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6+(1-i)z^3-i=0$

Niveau 2

Exercice 18.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n=1$

® **Exercice 19.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \\ |x|=|y|=|z| \end{cases}$$

Exercice 20.

Factoriser $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)$.

Exercice 21.

On note par Γ_∞ l'ensemble de toutes le racines de l'unité c'est-à-dire que $\Gamma_\infty=R_1\cup R_2\cup R_3\cup\ldots$.
Montrer que :

$$z\in\Gamma_\infty \Longleftrightarrow \begin{cases} |z|=1 \\ \frac{Arg(z)}{\pi}\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

® **Exercice 22.**

Trouver une CNS sur les nombres complexes $z_1,\ldots,z_n$ pour avoir :

$$|z_1+\ldots+z_n|=|z_1|+\ldots+|z_n|$$

Exercice 23.

1. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Résoudre $\cos^3(x)\sin(3x)+\cos(3x)\sin^3(x)=\frac{3}{4}$

Exercice 24.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(kx)$.
2. En déduire la valeur de $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$

Niveau 3

Exercice 25.

Montrer que : $\tan(nx)=\dfrac{\displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n}(-1)^kC_n^{2k+1}\tan^{2k+1}(x)}{\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}(-1)^kC_n^{2k}\tan^{2k}(x)}$

Exercice 26.

Soit $C=\{a^2+b^2\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que C est stable par produit.
2. En déduit que $9688770=2\times3^2\times5\times7^2\times13^2$ peut s'écrire sous la forme a^2+b^2.

Exercice 27 - Les polynômes de Tchebitchev.

1. Montrer qu'il existe une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\cos(n\theta)=T_n(\cos(\theta))$
2. Calculer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.
3. Montrer que le degré de T_n est n.

Exercice 28 - Noyaux de Dirichlet et Fejer.

On pose $e_k:x\mapsto e^{ikx}$, $D_n(x)=\displaystyle\sum_{|k|\leq n}e_k(x)$ et $K_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$. Montrer que si x n'est pas un multiple de 2π alors :

$$D_n(x)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad K_n(x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

® **Exercice 29.**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx+\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx+\theta)$

Applications à d'autres disciplines

Exercice 30 - Electricité - Impédance complexe.

Dans tout l'exercice, le nombre complexe i sera noté j pour ne pas confondre avec l'intensité.

Partie I. Représentation complexe. Soit ω un réel positif. On note E_ω l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(t) \;=\; A\cos(\omega t + \phi)$$

avec ϕ et A dans $\mathbb{R}$.

1. Soient f_1, f_2 dans E_ω et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \;=\; \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

2. En déduire que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est dans E_ω (On pourra se rendre compte avec les prochains chapitres que E_ω est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel).
3. Soit $f(x) = A\cos(\omega t + \phi)$ une application de E_ω. On note $\underline{f}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\underline{f}(t) \;=\; Ae^{j(\omega t+\phi)}$$

Montrer que pour tout f_1, f_2 dans E_ω et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\underline{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2} \;=\; \lambda_1 \underline{f_1} + \lambda_2 \underline{f_2}$$

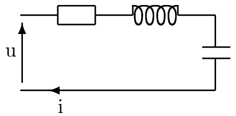
On dit que l'application qui à f associe $\underline{f}$ est une application linéaire.

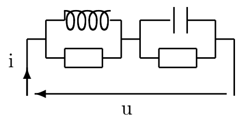
4. Soit f dans E_ω. Montrer que f' est aussi dans E_ω puis que $\underline{(f')} = \left(\underline{f}\right)'$ et enfin que $\underline{f'} = j\omega \underline{f}$.

Partie II. Impédance complexe.

1. Considérons un dipôle passif avec u et i respectivement la tension aux bornes du dipôle et l'intensité traversant le dipôle. On suppose de plus que u et i sont dans E_ω. L'impédance complexe est le nombre complexe $\underline{Z}$ tel que $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$.
   a) On rappelle que dans le cas d'une résistance, on a $u = Ri$. Déterminer l'impédance complexe d'une résistance.
   b) On rappelle que dans le cas d'une bobine, on a $u = L\frac{di}{dt}$. Déterminer l'impédance complexe d'une bobine.
   c) On rappelle que dans le cas d'un condensateur, on a $i = C\frac{du}{dt}$. Déterminer l'impédance complexe d'un condensateur.

Partie III. Applications. On va voir que l'introduction des complexes en électricité simplifie énormément les calculs. Dans chacun des circuits suivants, on a $u = A\cos(\omega t)$, déterminer la valeur de l'intensité i.





Chap 3

Nombres complexes.

Quelques exercices corrigés

Ⓡ **Exercice 8.**

Montrer que pour tout couple (z, z') de nombres complexes, on a :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En déduire que si $|z| \leq k \leq 1$ pour un certain k de $\mathbb{R}$ alors

$$1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$$

- -

<u>Etape 1</u> : Etablissons tout d'abord l'inégalité : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Les deux membres étant **positifs**, ils sont rangés dans le même ordre que leur carré. Cherchons donc le signe de $|z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2$:

$$|z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) - \left(|z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|\right) = z.\overline{z'} + \overline{z}z' - 2|z||z'|$$

Remarquons ensuite que $z.\overline{z'} + \overline{z}z' = z.\overline{z'} + \overline{z.\overline{z'}} = 2.Re(z\overline{z'})$. De plus pour tout nombre complexe Z, on a $Re(Z) \leq |Z|$. En prenant $Z = z.\overline{z'}$, on a $Re(z\overline{z'}) \leq |z||\overline{z'}| = |z||z'|$. Ainsi :

$$|z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 = 2\left(Re(z\overline{z'}) - |z||z'|\right) \leq 0$$

et le résultat est montré.

<u>Etape 2</u> : Montrons ensuite la première inégalité : $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$

On a :

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |-z'| = |z + z'| + |z'|$$

Ainsi $|z| - |z'| \leq |z + z'|$. On réitère le même processus en inversant les rôles de z et z' et on trouve $|z'| - |z| \leq |z + z'|$ et donc $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$ (En effet si $a \leq b$ et $-a \leq b$ alors $|a| = max(a, -a) \leq b$).

<u>Etape 3</u> : Déduisons en que : $|z| < k < 1 \Longrightarrow 1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$

prenons $z' = 1$ dans l'inéquation $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$. On obtient :

$$1 - |z| \leq |z + 1| \leq 1 + |z|$$

On remarque ensuite que $1 + |z| \leq 1 + k$ et que $1 - |z| \geq 1 - k$.

Ⓡ **Exercice 10.**

Montrer qu'un nombre complexe est réel si et seulement si $|z - i| = |z + i|$.

- -

On a :
$$|z-i|=|z+i| \iff |z-i|^2=|z+i|^2 \iff (z-i)(\overline{z}+i)=(z+i)(\overline{z}-i)$$
Soit encore :
$$|z-i|=|z+i| \iff z^2+iz-i\overline{z}+1=z^2-iz+i\overline{z}+1 \iff 2i(z-\overline{z})=0 \iff z\in\mathbb{R}$$

Ⓡ Exercice 16.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2-i)z^2-(7-6i)z+11-3i=0$

- -

4 - Résolution de l'équation : $z^6+(1-i)z^3-i=0$ (*)

Posons $Z=z^3$, l'équation (*) devient alors : $Z^2+(1-i)Z-i=0$. Calculons Δ :
$$\Delta=(1-i)^2-4(-i)=2i$$
Cherchons à présent les racines carrées de Δ, leur partie réelle x et partie imaginaire y vérifie donc :
$$\begin{cases} x^2-y^2=Re(\Delta)=0 \\ 2xy=Im(\Delta)=2 \\ x^2+y^2=\sqrt{0^2+2^2}=2 \end{cases}$$
On obtient donc $x^2=y^2=1$. Puisque x et y sont de même signe, d'après l'équation $2xy=2$, les racines carrées de Δ sont $1+i$ et $-1-i$ et ainsi
$$Z=\frac{-(1-i)-(1+i)}{2}=-1 \qquad \text{ou} \qquad Z=\frac{-(1-i)+(1+i)}{2}=i$$
Il suffit de revenir à la variable z en résolvant :
$$\begin{cases} z^3=i=e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z^3=-1=e^{i\pi} \end{cases}$$
Les valeurs possibles pour z sont donc les racines troisième de -1 et de i, donc :
$$z=e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad z=e^{i\frac{\pi+2k'\pi}{3}}$$
pour k et k' variant entre 0 et 3. L'ensemble solution S est donc :
$$S=\{e^{\frac{i\pi}{6}},e^{\frac{i5\pi}{6}},e^{\frac{i9\pi}{6}},e^{\frac{i\pi}{3}},e^{i\pi},e^{\frac{i5\pi}{3}}\}$$
Soit encore après simplification :
$$S=\{e^{\frac{i\pi}{6}},e^{\frac{i5\pi}{6}},-i,e^{\frac{i\pi}{3}},-1,e^{\frac{i5\pi}{3}}\}$$

Ⓡ Exercice 19.

Résoudre dans $\mathbb{C}$, le système :
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \\ |x|=|y|=|z| \end{cases}$$

- -

Etape 1 : Montrons que $|x|=|y|=|z|=1$
En appliquant le module à l'équation 2, on trouve $|xyz|=1$ soit encore $|x||y||z|=1$. Comme les modules de x, y et z sont égaux, d'après l'équation 3, on a $|x|=|y|=|z|=\sqrt[3]{1}=1$.

Etape 2 : Prouvons que $xy+xz+yz=1$
Comme les complexes x, y et z sont de module 1, leur conjugué est égal à leur inverse. On a donc :
$$xy+xz+yz=\frac{xyz}{z}+\frac{xyz}{y}+\frac{xyz}{x}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}=\overline{x+y+z}=1$$

Etape 3 : Déterminons x, y et z.
Considérons le polynôme $P=(X-x)(X-y)(X-z)$ d'indéterminé X, on a alors :
$$P=(X-x)(X-y)(X-z)=X^3-X^2(x+y+y)+X(xy+xz+yz)-xyz=X^3-X^2+X-1$$
En remarquant que 1 est racine évidente, on prouve que :
$$P=(X-x)(X-y)(X-z)=(X-1)(X^2+1)=(X-1)(X+i)(X-i)$$
Or deux polynômes égaux ont les mêmes racines, ainsi x, y et z sont égaux à 1, i, $-i$ à l'ordre près. L'ensemble solution S est donc égal à :
$$S=\{(1,i,-i),(1,-i,i),(i,1,-i),(i,-i,1),(-i,1,i),(-i,i,1)\}$$

Ⓡ Exercice 22.

Trouver une CNS sur les nombres complexes z_1, …, z_n pour avoir :
$$|z_1+\ldots+z_n|=|z_1|+\ldots+|z_n|$$

- -

Calculons $A=|z_1+\ldots+z_n|^2-((|z_1|+\ldots+|z_n|)^2$:
$$\begin{aligned} A &= \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \overline{z_j}\right)-\left(\sum_{i=1}^n |z_i|\right)^2 &&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n z_i\overline{z_j}-\sum_{i=1}^n |z_i|^2-2\sum_{1\le i<j\le n}|z_i||z_j| \\ &= \sum_{1\le i\ne j\le n} z_i\overline{z_j}-2\sum_{1\le i<j\le n}|z_i||z_j| &&= 2\sum_{1\le i\le j\le n} Re(z_i\overline{z_j})-2\sum_{1\le i<j\le n}|z_i||z_j| \\ &= 2\sum_{1\le i\le j\le n}\left(Re(z_i\overline{z_j})-|z_i||z_j|\right) \end{aligned}$$

Ainsi comme tous les termes $Re(z_i\overline{z_j}) - |z_i||z_j|$ sont négatifs, la somme A est donc nulle si et seulement si tous ces termes sont nuls. On doit donc avoir :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \ \ Re(z_i\overline{z_j}) = |z_i||z_j|$$

C'est-à-dire que tous les $z_i\overline{z_j}$ doivent appartenir à $\mathbb{R}^+$, ce qui revient à dire que tous les z_i sont sur une même demi droite d'origine 0.

® **Exercice 29.**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx+\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx+\theta)$

- -

Notons C_n la somme des cosinus et S_n la somme des sinus, on a alors :

$$S_n \;=\; Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx+i\theta}\right) \;=\; Im\left(e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k\right) \;=\; Im\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}\right)$$

La dernière égalité étant obtenue grâce la formule de la somme des termes d'une suite géométrique qui peut être appliquée car $e^{ix} \neq 0$. En factorisant par exponentielle de la demi-somme, on obtient :

$$S_n \;=\; Im\left(e^{i\theta}\frac{e^{\frac{(n+1)ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \;=\; Im\left(e^{i\theta+\frac{nix}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Enfin, on obtient :

$$S_n \;=\; \sin\left(\theta+\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad C_n \;=\; \cos\left(\theta+\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Nombres complexes.

Devoir maison

Problème - Cosinus et sinus de nombres complexes

Soit $z = x + iy$ la forme algébrique d'un nombre complexe. On rappelle que $e^z = e^x e^{iy}$. Posons :

$$\cos(z) \;=\; \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad\qquad \sin(z) \;=\; \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

1. Montrer que les formules trigonométrique suivantes sont encore valables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire montrer que pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} \cos(z_1+z_2) \;=\; \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \\ \sin(z_1+z_2) \;=\; \cos(z_1)\sin(z_2) + \sin(z_1)\cos(z_2) \\ \cos^2(z_1) + \sin^2(z_1) \;=\; 1 \end{cases}$$

2. On définit également pour tout x **réel** le cosinus et le sinus hyperbolique par :

$$ch(x) \;=\; \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad\qquad sh(x) \;=\; \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Exprimer $ch(x)$ et $sh(x)$ en fonction d'un sinus et d'un cosinus complexe.

3. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de cos, sin, ch, et sh de nombres réels.
4. Calculer $|\cos(z)|$ et $|\sin(z)|$.
5. Exprimer $\overline{\cos(z)}$ et $\overline{\sin(z)}$ en fonction de $\cos(\overline{z})$. et $\sin(\overline{z})$