Chapitre 2

Généralités sur les applications.

Généralités sur les applications.

Et s'il ne fallait retenir que quatre points ?

1. **Maîtriser les notions de prolongements et restrictions d'applications.**

2. **Savoir trouver l'image et la préimage d'un ensemble par une application.** Ceci présuppose de connaître les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$	4. $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$	5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	6. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

3. **Savoir montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est paire, impaire, périodique, majorée, minorée, bornée...**

4. **Savoir montrer qu'une application est bijective/injective/surjective.** Essayons de donner une liste de façon permettant de montrer qu'une application f de E dans F est injective/sujective/bijective :
   a) Si $E = F$ et si f est une application involutive, c'est-à-dire que l'application f vérifie : $f\, o\, f = id$, alors f est bijective (car inversible à gauche et à droite) et $f^{-1} = f$.
   b) Si E et F sont des sous ensembles de $\mathbb{R}$ et si f est strictement monotone (par exemple si $f' > 0$ ou $f' < 0$), alors f est injective.
   c) En posant $y = f(x)$, ne peut-on pas exprimer x en fonction de y ($x = g(y)$) ? Si c'est possible alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
   d) N'y aurait-il pas une application g simple qui vérifie $f\, o\, g = id$ ou/et $g\, o\, f = id$? Si oui, on en déduit que f est injective, surjective ou bijective. Dans le dernier cas, $g = f^{-1}$.
   e) On utilise les définitions : si on prouve que
      i. $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ alors f est injective.
      ii. $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$ alors f est surjective.

Généralités sur les applications.

Plan du cours

Généralités sur les applications.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une application et d'une fonction. (I)
2. Donner la définition de l'identité, de l'injection canonique et des fonctions caractéristiques. (I)
3. Donner la définition de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$. (I)
4. Donner la définition du domaine de définition d'une fonction à variable réelle, de son graphe. Donner ensuite les définitions d'une fonction paire et impaire puis donner les symétries du graphe qui en découlent. Enfin rappeler les définitions d'une fonction bornée, minorée, majorée ; on donnera également la caractérisation d'une fonction bornée à l'aide de la valeur absolue. (II)
5. Donner la définition d'une application injective, puis d'une application surjective. Vous donnerez ensuite un exemple d'application injective non surjective et un exemple d'application non injective et surjective. (III)
6. Expliquez pourquoi toute application involutive (f o f = Id) est bijective. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ est bijective. Déterminer f^{-1}. (III)

Généralités sur les applications.

Exercices types

Exercice 1 - Croissante ou pas croissante ?

En utilisant uniquement la définition, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est :

1. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$,
2. n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2 - Savoir montrer qu'une application est bijective.

Cet exercice a pour but d'illustrer différentes méthodes pour montrer qu'une application est bijective.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$. Calculer $f \, o \, f$ puis en déduire que f est bijective. Que vaut f^{-1} ?
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x^3 + x - 2$ est bijective. On pourra utiliser des théorèmes spécifiques aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ définie par $f(x) = y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est bijective. Pour cela on essaiera d'exprimer x en fonction de y. Que vaut f^{-1} ?
4. Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Montrer que l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\overline{A}))$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap \overline{A})$ est bijective. On pourra essayer de deviner une fonction g qui vérifie $f \, o \, g = id$ et $g \, o \, f = id$.
5. Soit f définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ par $f(p,q) = 2^p(2q+1)$. Montrer avec la définition que f est injective puis que f est surjective.

Exercice 3 - $f(f^{-1}(A))$ et $f^{-1}(f(A))$.

Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A un sous-ensemble de E.
   a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$
   b) Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$
   c) Soit x un élément de E. Montrer que si $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ alors $f(x)$ n'a qu'un seul antécédent.
   d) En déduire que :
   $$f \text{ injective} \iff \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$$
2. Soit B un sous-ensemble de F.
   a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$
   b) Montrer que si f est surjective alors $B = f(f^{-1}(B))$
   c) Soit y un élément de F. Montrer que si $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ alors y a au moins un antécédent.
   d) En déduire que :
   $$f \text{ surjective} \iff \forall X \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(X)) = X$$

Chap 2 **Généralités sur les applications.**

Exercices

> *"Il ne change pas souvent d'idées, car il n'en a pas des masses."*
>
> P. Perret.

Vrai - Faux

Exercice 1.

Soient E, F et G des ensembles, f et g respectivement dans $\mathcal{F}(E,F)$ et $\mathcal{F}(F,G)$ et A, B des sous-ensembles de E. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. f est injective si et seulement si tout élément de E a une image dans F.
2. $Id_E \; o \; f = f$.
3. Si f et g sont surjectives alors $g \; o \; f$ est surjective.
4. Si $g \; o \; f$ est surjective alors f et g sont surjectives.
5. Si f et g sont bijectives alors $(g \; o \; f)^{-1} = g^{-1} \; o \; f^{-1}$.
6. Soit y dans F, alors $f^{-1}(y) = \{x \in E \; / \; f(x) = y\}$.
7. $f^{-1}(f(A)) = A$.
8. $y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A \; / \; f(x) = y$.
9. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
10. $f|^{f(E)}$ est surjective.
11. Si $E = F = \mathbb{R}$ et f strictement croissante alors f est bijective.
12. $f^{-1}(y)$ représente l'ensemble des antécédents de y.
13. L'application h de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ est involutive donc bijective.
14. Si $g \; o \; f = id$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Rep : 11 fausses / 3 vraies (FFVFFFFVFV FFFF)

Niveau 1

Exercice 2.

Soit $g \in \mathcal{F}(E,F)$ et $f \in \mathcal{F}(F,G)$. Montrer que :

1. $f \; o \; g$ injective $\Longrightarrow g$ injective.
2. $f \; o \; g$ surjective $\Longrightarrow f$ surjective.
3. $f \; o \; g$ injective et g surjective $\Longrightarrow f$ injective.
4. $f \; o \; g$ surjective et f injective $\Longrightarrow g$ surjective.

Exercice 3.

Soit E et F des ensembles et f une application de E dans F.

1. Déterminer un ensemble A tel que $f|^A$ soit surjective.
2. Déterminer un ensemble B tel que $f|_B$ soit injective.

Exercice 4.

Pour chaque application f, étudier l'injectivité et la surjectivité. Dans le cas où celle-ci est bijective, exprimer f^{-1}

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \mapsto |x|$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \; x \mapsto |x|$
3. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \; x \mapsto |x|$
4. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \; x \mapsto x^2$
5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \mapsto x^3$
6. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*, \; x \mapsto \dfrac{1}{x}$
7. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}, \; x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x)$
8. $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1;1[, \; x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$
9. $f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}, \; x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$
10. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; (x,y) \mapsto (x, xy - y^3)$
11. $f : \mathbb{Z} \times [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $(n,x) \mapsto n + x$

Exercice 5.

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 + z$

1. f est-elle surjective ? injective ?
2. Déterminer l'image des ensembles $A = \{z \in \mathbb{C} \; / \; \left|z + \frac{1}{2}\right| = 2\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} \; / \; \left|z + \frac{1}{2}\right| \leq 2\}$

Exercice 6.

Soit f est g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes.

1. f et g injective $\Longrightarrow f + g$ injective. Idem pour surjective et bijective.
2. $f \times g = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 7.

Déterminer la parité de la composée puis du produit :

1. d'une fonction paire et d'une fonction impaire
2. de deux fonction paires.
3. de deux fonction impaires.

Niveau 2

Exercice 8.

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifiant

1) $\forall m, n \in \mathbb{Q},\ f(m+n) = f(m) + f(n)$.
2) $\forall m, n \in \mathbb{Q},\ f(m+n) = f(m) \times f(n)$.

Exercice 9.

Soit E, F, G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{G}(G, E)$, $h \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que si $f\ o\ g\ o\ h$ et $g\ o\ h\ o\ f$ sont injectives et $h\ o\ f\ o\ g$ est surjective alors les trois applications f, g, h sont bijectives.

® **Exercice 10.**

Soit E un ensemble et $\{A, B\}$ une partition de E. On définit f de $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 11.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$

1. Montrer que $\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$
2. Etudier et tracer la fonction f.

Exercice 12.

Soit E,F des ensembles, X un sous-ensemble de E et f une application de E dans F. Notons par $\overline{X} = C_E^X$, le complémentaire de X dans E.

1. Si f est injective alors $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$
2. $f^{-1}(\overline{X}) = \overline{f^{-1}(X)}$
3. $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{X}) = \overline{f(X)} \Longleftrightarrow f$ bijective.

Niveau 3

Exercice 13.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

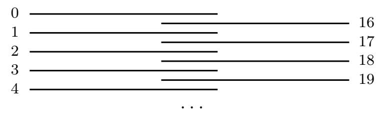
$$f(x) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \leq x\}$$

1. Montrer que f est injective et non surjective.
2. Montrer que : $\forall x, y \in E,\ f(x) \subset f(y) \Longleftrightarrow x \leq y$

Application à d'autres disciplines

Exercice 14 - Application à la Magie, les battages de Faro ou battages parfaits.

Un battage parfait consiste à couper un jeu de cartes en deux tas de même taille puis on regroupe les deux tas en alternant exactement les cartes :



Le schéma précédent correspond à un battage parfait pour un jeu de 32 cartes ; les nombres sur les côtés sont les positions des cartes avant le battage (on compte à partir de 0).

Notons f l'application de $\{0, \ldots, 31\}$ dans $\{0, \ldots, 31\}$ qui a la position d'une carte avant le battage lui associe sa position après le battage. Ainsi par exemple si x est dans $\{0, \ldots, 15\}$ alors $f(x) = 2x$.

1. Si x est dans $\{16, \ldots, 31\}$, que vaut $f(x)$?
2. Soit $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}^2$ une écriture de x en binaire. Que peut-on dire sur $a_0, \ldots, a_4$ si x est dans $\{0, \ldots, 15\}$? Si x est dans $\{16, \ldots, 31\}$?
3. Écrire $f(x)$ en binaire à l'aide des chiffres a_0,..., a_4.
4. En déduire que réaliser 5 battages parfaits de suite sur un jeu de 32 cartes ne change pas l'ordre des cartes.

Généralités sur les applications.

Quelques exercices corrigés

® **Exercice 10.**

Soit E un ensemble et $\{A, B\}$ une partition de E. On définit f de $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- -

Considérons l'application g de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par $g(X, Y) = X \cup Y$. On va montrer que g est l'application réciproque de f ce qui montrera que f est une application bijective.

• *Montrons que f o g=Id.* Soit X et Y respectivement dans $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(g(X,Y)) & = & f(X \cup Y) \\ & = & ((X \cup Y) \cap A\,,\,(X \cup Y) \cap B) \\ & = & ((X \cap A) \cup (Y \cap A)\,,\,(X \cap B) \cup (Y \cap B)) \end{array}$$

La dernière égalité étant obtenue en utilisant la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$. Remarquons ensuite que $X \subset A$, $Y \subset B$ et que $A \cap B = \emptyset$. Ainsi $X \cap B = \emptyset$, $X \cap A = A$, $Y \cap B = B$, $Y \cap A = \emptyset$. On obtient alors $f\, o\, g(X, Y) = (X, Y)$

• *Montrons que g o f=Id.* Soit X dans E, on a :

$$\begin{array}{rcl} g(f(X)) & = & g(X \cap A, X \cap B) \\ & = & (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ & = & (X \cup X) \cap (X \cup B) \cap (A \cup X) \cap (A \cup B) \\ & = & (X \cup X) \cap (X \cup (A \cap B)) \cap (A \cup B) \\ & = & X \cap (X \cup \emptyset) \cap E \\ & = & X \end{array}$$

Ainsi g est l'inverse de f ; l'application f est donc bijective.

Généralités sur les applications.

Devoir maison

Problème - Bijectivité d'une application

Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $F(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$

1. Montrer, à l'aide de la définition, que F est injective.
2. Montrer que $F(\mathbb{R}) \subset S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.
3. On pose $E = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Montrer que $F(\mathbb{R}) \subset E$.
4. Montrer que restriction $F|^E$ de F est bijective. Exprimer $\left(F|^E\right)^{-1}$.
5. Retrouver rapidement le résultat précédent en posant $t = tan\,(\theta/2)$