Compilation

Exercices

Exercice 1 - Semaine 0.

Soit f une application C^{n+1} d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence sur n que pour tous x et a dans I :

$$f(x) \;=\; f(a) \;+\; f'(a)(x-a) \;+\; \ldots \;+\; f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \;+\; \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

   C'est la formule de Taylor Reste intégrale.

2. Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$ que :

$$f^{(n+1)} = 0 \iff f \in \mathbb{R}_n[X]$$

   On assimile ici polynôme et fonction polynôme.

Exercice 2 - Semaine 1.

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

et $u_0 \in [-2;+\infty[$, converge vers une limite indépendante de u_0.

Exercice 3 - Semaine 2.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on définit :

$$\phi(x) \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ.
2. Montrer que ϕ est décroissante.
3. Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$.

Exercice 4 - Semaine 3.

Posons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}dt \qquad\qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$$

1. Montrer que I et J convergent.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I+J$ en effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$. En déduire la valeur de I.

Exercice 5 - Semaine 4.

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t}dt \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/t)}{t}dt$$

2. En déduire un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de :

$$\int_1^{x} \frac{\arctan(t)}{t}dt$$

Exercice 6 - Semaine 5.

Soit n dans $\mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que la fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par le déterminant :

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 + x & (\lambda_0 + x)^2 & \ldots & (\lambda_0 + x)^n \\ 1 & \lambda_1 + x & (\lambda_1 + x)^2 & \ldots & (\lambda_1 + x)^n \\ 1 & \lambda_2 + x & (\lambda_2 + x)^2 & \ldots & (\lambda_2 + x)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n + x & (\lambda_n + x)^2 & \ldots & (\lambda_n + x)^n \end{vmatrix}$$

est une application constante. Quelle est la valeur de la constante ?

Exercice 6.

Soit n un entier supérieur ou égale à 2 et A une matrice de taille $n \times n$ de rang 1.

1. Déterminer la dimension du noyau de A. En déduire que 0 est valeur propre. Quelles sont les multiplicités possibles de 0 ?
2. Montrer qu'il existe une autre valeur propre de A si et seulement si $tr(A) \neq 0$.
3. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $tr(A) = 0$.

Exercice 7 - Semaine 7.

Considérons l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi(M) = M + tr(M)I$$

1. Déterminer les valeurs propres de ϕ.
2. Montre que ϕ est diagonalisable.
3. Déterminer $tr(\phi)$ et $det(\phi)$.