Révision oraux

Exercices

Exercice 1 - CCP.

Montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)} dt$$

est convergente. Trouver un équivalent de I_n.

Exercice 2 - CCP.

Soit a dans $\mathbb{R}$. La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 3 - CCP.

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

et M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - 3M = A$. Montrer que $AM = MA$, puis déterminer les matrices M.

Exercice 4 - CCP.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

et on note R le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} s_n x^n$$

1. Montrer que la série définissant s_n est convergente.
2. En déduire que $R \geq 1$.
3. Déterminer un équivalent de s_n.
4. En déduire que $R = 1$.

Exercice 5 - CCP.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

1. Déterminer les extremums de la fonction.
2. f admet-elle un maximum global sur R^2 ? Préciser le minimum global sur R^2.

3. Soit
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\right\}$$
Représenter l'ensemble D
4. Quels sont les extremums globaux de f sur D ?

Exercice 6 - CCP.

Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Quels sont les éléments propres de f ?
3. f est-elle diagonalisable ? inversible ?

Exercice 7 - CCP.

Soit $n \geq 3$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$a_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. La matrice $A - 3I_n$ est-elle inversible ?
3. En déduire les valeurs propres de A sans calculer le polynôme caractéristique.
4. Déterminer les vecteurs propres de A.

Exercice 8 - CCP.

Soit X et Y deux variables aléatoires. X suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y sachant $X = n$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p) avec p dans $[0,1[$.

1. Donner la loi de (X,Y).
2. Reconnaître la loi de Y.
3. Soit $Z = X - Y$. Donner la loi de Z.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 - CCP.

Soit
$$I = \int_0^1 \frac{t\ln^2 t}{2(1-t)^2} dt$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$
3. En déduire que :
$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Exercice 10 - CCP.

Les matrices à diagonale propre sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est constituée de ses valeurs propres en respectant les ordres de multiplicité. On note ε_n l'ensemble des matrices à diagonale propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre.
2. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est-elle une matrice à diagonale propre ?
3. Soit A appartenant à ε_n antisymétrique.
   (a) Donnez les valeurs propres de A.
   (b) Montrez qu'il existe un p dans $\mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.
   (c) Calculez $(A^T A)^p$, puis en remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrez que $A = 0$.
4. Rappeler la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
5. Soit F un sous-espace de ε_n, montrez que $dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 11 - CCP.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que la suite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) \neq 0$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$
   a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, puis sur $]0;+\infty[$

Exercice 12 - CCP.

Montrer que les matrices A et B suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 - CCP.

Montrer que l'endomorphisme u de matrice canoniquement associée

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

est une rotation de $\mathbb{R}^3$. Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 14 - CCP.

Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. Déterminer le domaine de définition de S
2. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$
3. Calculer $S'(1)$

Exercice 15 - CCP.

Considérons la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)dt$$

1. Montrer que f est de classe C^1
2. Déterminer une équation différentielle linéaire dont f est solution.
3. Reconnaitre f

Exercice 16 - CCP.

Soit, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} \qquad\qquad J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt$$

On admet que $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer la convergence de l'intégrale I_n.
2. Calculer, pour n dans $\mathbb{N}^*$, I_{2n} en fonction de I_{2n-2}.
3. Montrer que :
$$I_{2n} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}$$
4. Déterminer l'ensemble de définition de J.
5. Grâce au DSE du cos, calculer J.

Exercice 17 - CCP.

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & -3x & + & 5y & - & 5z \\ y' & = & -4x & + & 6y & - & 5z \\ z' & = & -4x & + & 4y & - & 3z \end{array}\right.$$

Exercice 18 - CCP.

On pose pour n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\mathbb{N}$:

$$I_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}dt \qquad\qquad a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$$

1. Montrer l'existence de $I_{n,k}$.
2. Calculer $I_{n,k}$.
3. Quel est le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$?
4. Montrer que pour x dans $]-R;R[$:
$$\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx}dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
.

Exercice 19 - CCP.

Soit une urne avec 3 jetons numérotés de 1 à 3. On tire avec remise des jetons de l'urne. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaire pour obtenir 2 jetons différents pour la première fois. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 jetons pour la première fois.

1. Donner la loi de Y.
2. Reconnaitre la loi de $Y - 1$. En déduire la variance et l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de (Y, Z).

4. Donner enfin la loi de Z.

Exercice 20 - CCP.

On considère la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
2. Donner le développement en série entière de $(2-x^2)f'$.
3. En déduire une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients non constants vérifiée par f sur $]-R;R[$.
4. Rappeler l'expression de $\arcsin'$ puis résoudre l'équation différentielle. En déduire une expression simplifiée de la fonction f.

Exercice 21 - CCP.

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P possède n racines distinctes alors A et B sont semblables.
2. Déterminer deux matrices non semblables ayant le même polynôme caractéristique.

Exercice 22 - CCP.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M(M^TM)^2 = I_n$$

1. Montrer que M est inversible.
2. Montrer que M est symétrique.
3. Montrer que $M = I_n$

Exercice 23 - CCP.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose :

$$\forall f,g\in E,\ \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)t^2dt$$

1. Montrer que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose :

   $$I_n = \int_0^1 t^n \ln(t)dt$$

   Montrer que In est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et calculer sa valeur.
3. On note F l'ensemble des fonctions affines de E et on note h la fonction de E définie par $h(x) = x\ln(x)$. Déterminer l'image de h par la projection orthogonale sur F (orthogonale pour le produit scalaire défini en 1.).
4. Calculer :

   $$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left\{ \int_0^1 t^2(at+b-t\ln(t))^2dt \right\}$$

Exercice 24 - CCP.

Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et B défini par blocs de la manière suivante :

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On va montrer de deux manières que B est diagonalisable. Les questions sont indépendantes.

1. Diagonaliser
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
En déduire que B est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout polynôme P, on a :
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$
En déduire que B est diagonalisable.

Exercice 25 - CCP.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tous x de $[0,1]$, on pose :
$$g_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^x \qquad I_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |g_n'(x)| \le \frac{e^x}{n}$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |g_n(x) - 1| \le \frac{xe^x}{n}$$
3. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (I_n)
4. Prouver la convergence uniforme de (I_n) sur $[0,1]$.

Exercice 26 - CCP.

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ? La dimension de $ker(A)$?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe λ dans $]1, +\infty[$ tel que $Sp(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 27 - CCP.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on note :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
4. En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
5. Proposer une autre méthode pour décomposer f en somme de série ; obtient-on la même série ?

Exercice 28 - CCP.

On note pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$$

1. Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite.
2. Étudier la convergence de la série :
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$$
3. Soit la série entière :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \geq \frac{1}{2n+1}$$
4. Calculer le rayon de convergence de f.
5. Montrer que f est solution d'une équation différentielle.

Exercice 29 - CCP.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(t)dt$$

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$
3. Déterminer un équivalent de I_n.
4. En déduire la valeur de : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
5. Montrer la convergence de $\sum(-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

Exercice 30 - CCP.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et
$$\forall x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \ f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f ; est-elle de classe sur $\mathbb{R}^2$?
3. Calculer :
$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0,0)$$
Commenter.

Exercice 31 - Mines-Télécom.

Soient :
- n dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $]0,1[$
- X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n,p).
- Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
- Z la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in [\![1,n]\!], \ Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) = 0 \end{cases}$$

On suppose X et Y indépendantes.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Donner son espérance.

Exercice 32 - Mines-Télécom.

On considère la série S :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$$

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt \quad = \quad 0$$

2. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(2kt) \quad = \quad \frac{(-1)^n\cos((2n+1)t) - \cos(t)}{2\cos(t)}$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(2kt)dt$. En déduire que la série S converge et donner sa somme.

Exercice 33 - Mines-Télécom.

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Calculer :

$$P(X+Y=Z)$$

Exercice 34 - Mines-Télécom.

1. Soit N la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall(x,y,)\in\mathbb{R}^2,\ N(x,y) \quad = \quad max\left(|y|,\left|x+\frac{y}{2}\right|,|x+y|\right)$$

   Représenter la boule unité fermée pour cette norme.
2. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n et $(\phi_1,\ldots,\phi_p)$ une famille de formes linéaires sur E. un -espace vectoriel de dimension . A quelle condition l'application définie par :

$$\forall x\in E,\ N(x)=\max_{1\leq i\leq p}|\phi_i(x)|$$

   est-elle une norme ?

Exercice 35 - Mines-Télécom.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$. Soit H le sous-espace engendré par $a=e_1+e_2+e_3$ et $b=e_1-e_4$.

1. Construire une base orhogonale de H.
2. Donner la matrice dans la base β de la projection orthogonale sur H.
3. Calculer :

$$\inf_{x\in H}\|x-e_1\|$$

Exercice 36 - Mines-Télécom.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note f_n l'application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) \quad = \quad \frac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1[$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On note :

$$I_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}dx$$

2. Déterminer la limite de (I_n) en $+\infty$
3. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $I_k - I_{k+1}$
4. En déduire que :

$$I_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Exercice 37 - Mines-Télécom.

On définie l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$$

1. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
2. En déduire F.

Exercice 38 - Mines-Télécom.

Soient
- X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p,
- Y une suit une loi de Poisson de paramètre λ.
- $Z = XY$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de Z
2. Déterminer G_Z la fonction génératrice de Z.
3. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 39 - Mines-Télécom.

Soit l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$

Déterminer une solution développable en série entière et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 40 - Mines-Télécom.

On considère une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$MM^TM = I_n$$

1. Trouver M lorsque M est à coefficients dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si M est à coefficients dans $\mathbb{C}$ alors M est diagonalisable.

Exercice 41 - Centrale.

Soit a dans $]-1;1[$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sin(a^nx)$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est C^∞.
3. Développer f en série entière.

Exercice 42 - Centrale.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ inversible.

Exercice 43 - Centrale.

Posons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

1. Donner le rayon R de convergence de f.
2. Montrer que :
$$\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$
3. A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} \quad = \quad 4^n$$

Exercice 44 - Centrale.

1. Déterminer l'ensemble des matrices A vérifiant :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA$$
2. Déterminer l'ensemble des matrices A vérifiant :
$$\forall M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}),\ AM = MA$$

Exercice 45 - Centrale.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n $(n \geq 1)$

1. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x de E,$(x, u(x))$ lié. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice ayant des 0 sur la diagonale.

Exercice 46 - Centrale.

On considère une urne contenant n $(n \in \mathbb{N}^*)$ boules numérotés de 1 à n. On tire aléatoirement k boules en une seule prise. On note X le plus petit numéro obtenu.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$, puis $E(X)$.

Exercice 47 - Centrale.

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et pour tout élément de E, posons :

$$T(f)(x) \quad = \quad \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

1. Montrer que $T(f)$ est prolongeable par continuité en 0. En déduire que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $Ker(T)$.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice 48 - Centrale.

Quelle est la nature de la série : $\sum \sin\left(\pi(1+\sqrt{2})^n\right)$.

Astuce non fournie : on pourra montrer que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n \in 2\mathbb{N}$

Exercice 49 - Centrale.

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si P ne s'annule pas alors il en est de même pour $Q = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}$

Astuce non fournie : on pourra considérer la fonction $\varphi(x) = Q(x)e^{-x}$

Exercice 50 - Centrale.

Posons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. Donner les domaines de définition D_f et D_g de f et g.
2. Étudier les limites de f aux bornes de D_f.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de g.
4. Donner une relation entre f et g, puis un équivalent de $f(x)$ en 1^+.

Exercice 51 - Mines-Ponts.

1. Donner la nature de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$
2. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π périodique, telle que $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$. Montrer que $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ est périodique.
3. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\delta}$.
4. Posons
$$F(x) = \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t^x} dt$$
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $F(n\pi)$. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $F(x)$.

Exercice 52 - Mines-Ponts.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi(M) = AMB$.

1. Montrer que $\varphi = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.
2. Montrer que φ nilpotente si et seulement si A ou B nilpotentes.
3. On suppose A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
   (a) Posons $\alpha(M) = AM$ et $\beta(M) = MB$. Montrer que α et β sont diagonalisables.
   (b) Montrer que α et β sont simultanément diagonalisables.
   (c) En déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 53 - Mines-Ponts.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M la matrice définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Montrer que $det(M) \geq 0$.

Exercice 54 - Mines-Ponts.

1. Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer A et $-A$ sont semblables si et seulement si $tr(A) = 0$.
2. Montrer que le résultat est faux si la matrice est de taille plus grande.

Exercice 55 - Mines-Ponts.

Considérons la série de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(x)e^{-nx}$$

La série est-elle simplement convergente ? uniformément convergente ? Quelle est sa somme ?

Exercice 56 - Mines-Ponts.

Déterminer les matrices nilpotentes A vérifiant $A^T A = AA^T$.

Exercice 57 - Mines-Ponts.

Soit P un polynôme scindé à racines simples.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples.
2. Montrer que P n'a pas 2 coefficients consécutifs nuls.