Révision oraux

Exercices

Exercice 1.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   — sans calcul,
   — en calculant le polynôme caractéristique,
   — en utilisant le théorèrme du rang,
   — en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 2.

Convergence et somme des séries :

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad\qquad \sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 3.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E.

1. Montrer que :
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \;\leq\; \mathrm{rg}(f+g) \;\leq\; \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$
2. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$$
3. En déduire que :
$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \\ E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \end{cases}$$

Exercice 4.

Déterminer les $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;=\; n$$

Exercice 5.

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles n'ayant que des valeurs propres strictement positives. On définie la suite de matrices (A_n), par A_0 quelconque dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$A_{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(A_n + A_n^{-1}\right)$$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, A_n existe et est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la limite de la suite (A_n).

Exercice 6.

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) \neq 0$. Posons

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n f(x) dx$$

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de I_n si f est C^1.
2. Retrouver le résultat en supposons f uniquement C^0. On pourra poser $u = (1-x)^{n+1}$.

Exercice 7.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices AA^T et $A^T A$ sont semblables.

Exercice 8.

Posons pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

1. Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.
5. En déduire que :
$$S(x) = \frac{3}{4}(x - \sin(x))$$

Exercice 9.

Montrer que la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$ est semi-convergente.

Exercice 10.

Définissons la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :
$$(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$$
3. Exprimer f sans somme.

Exercice 11.

Définissons la fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
4. Déterminer la limite de $f(x)$ en 0.

Exercice 12.

1. Montrer que tout sev d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé. En déduire que $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$, $S_n(\mathbb{K})$ sont fermés.
2. Est-ce que les ensembles $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$, $S_n(\mathbb{K})$ et $O_n(\mathbb{K})$ sont compacts ?
3. Montrer que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 13.

Pour tout x dans $[0,1]$, et tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_0(x) = 0$ et :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - u_n^2(x)\right)$$

1. Pour tout x de $[0,1]$, notons f_x l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_x(y) = y + \frac{1}{2}\left(x - y^2\right)$$

   Montrer que f_x est croissante et que $f_x([0,1]) \subset [0,1]$.
2. En déduire que (u_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.
3. Posons $h_n(t) = 2(1-t)t^n$. Montrer que (h_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
4. Montrer que :

$$\left|\sqrt{x} - u_n(x)\right| \leq h_n\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

5. En déduire que (u_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 14.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E tel que $u^r = Id$ avec r dans $\mathbb{N}^*$. Posons

$$p = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} u^k$$

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Montrer que : $Ker(p - Id) = Ker(u - Id)$
3. En déduire que :

$$dim_{\mathbb{K}}\left(Ker(u - Id)\right) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} tr\left(u^k\right)$$

Exercice 15.

On considère E un ensemble non vide muni une LCI noté * et n dans $\mathbb{N}$. On appelle parenthésage d'un produit $a_0 * a_1 * \ldots * a_n$ une manière de disposer des parenthèses sur ce produit de façon à déterminer l'ordre dans lequel on réalise les produits. On note C_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de $n+1$ éléments de E. Par exemple, pour $n = 3$, il y a $C_3 = 5$ parenthésages possibles :

$$((a*b)*c)*d \quad (a*b)*(c*d) \quad (a*(b*c))*d \quad a*((b*c)*d) \quad a*(b*(c*d))$$

On remarquera que $a*(b*c)*d$ n'est pas un parenthésage de $a*b*c*d$ car une fois le produit $b*c$ réalisé, on ne sait pas si on doit le multiplier d'abord avec a ou avec d. On convient que $C_0 = 1$.

1. Calculer C_1, C_2 et C_4.
2. Montrer que pour $n \geq 1$, on a : $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.
3. Notons également la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

   On admet que le rayon de convergence de f est strictement positif. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est solution du système suivant d'inconnue la fonction h :

$$(S) \quad \begin{cases} h^2(x) - h(x) + x = 0 \text{ sur un voisinage de } 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

4. Montrer que l'application g définie de $I = \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

   est l'unique solution continue du système (S) :
5. Effectuer le DSE de la fonction $x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

Exercice 16.

1. Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes et (b_n) une suite de $\mathbb{R}^+$ vérifiant $a_n = o(b_n)$ et tels que $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$$

2. Soit (u_n) une suite convergeant vers l. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k - l}{n} = o(1)$$

3. En déduire (Cesàro) que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 17.

Considérons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = 1 \qquad (E)$$

   vérifiant $y(0) = 0$.
2. Montrer que f est solution de (E). En déduire que f est développable en série entière. Donner son développement.

Exercice 18.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{i 2^k x}}{k!}$$

1. Montrer que f est C^∞.
2. Chercher le rayon de convergence de la série de Taylor de f. En déduire que f n'est pas DSE au voisinage de 0.

Exercice 19.

Définissons la fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(x) \; = \; \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$$

Justifier et calculer :

$$\int_0^1 \psi(x)dx$$

Exercice 20.

Soit E un espace vectoriel euclidien, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel stable par u.

1. Montrer que si u est orthogonal, symétrique ou antisymétrique alors $F^\perp$ est stable par u.
2. Montrer qu'il existe des endomorphismes u pour lesquels, $F^\perp$ n'est pas stable par u.
3. Un endomorphisme de E est dit normal s'il existe une base dans laquelle la matrice de u et sa transposée commutent. Montrer que la matrice d'un endomorphisme normal u et sa transposée commutent dans toutes les BON.
4. Montrer que les endomorphismes symétriques, antisymétriques et orthogonaux sont des endomorphismes normaux.
5. Soit u un endomorphisme normal. En considérant la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe orthogonale $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, montrer que $F^\perp$ est stable par u.

Exercice 21.

Soit $\mathcal{F} \; = \; (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Notons A la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans une BON β et $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice ayant pour coefficients $(\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.

1. Montrer que : $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n) \; = \; {}^tAA$
2. Montrer que : $rg\left(\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n)\right) \; = \; rg(u_1, \ldots, u_n)$
3. Soit x dans E, notons $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Exprimer $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n, x - p(x))$ en fonction de $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$. En déduire que :

$$d(x, F) \; = \; \sqrt{\frac{\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n, x)}{\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n)}}$$

4. Expérimenter la formule pour $E = \mathbb{R}^4$, $x = (1, 1, 2, 3)$ et $F = Vect((1, 1, 1, 1)\;,\;(1, -1, 1, -1))$

Exercice 22.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante c'est-à-dire que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$|a_{ii}| \; > \; \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $Ker(A)$, et notons i_0 tq :

$$|x_{i_0}| \; = \; \underset{i \in \{1, \ldots, n\}}{\text{Max}} |x_i|$$

   Montrer que :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| \; \geq \; \left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \right) |x_{i_0}|$$

2. En déduire que A est inversible.

Exercice 23.

Alain (le Bon), Bob (la Brute) et Carlos (le Truand) s'affrontent en truel. Les règles sont les suivantes :

— A tire en premier, puis B (s'il est encore debout), puis C, puis A à nouveau, puis B, etc... jusqu'à ce qu'un seul reste debout.

— Chaque tireur choisit de tirer sur l'un des deux autres ou de tirer en l'air.

— Détail charmant, A touche sa cible une fois sur 3, B une chance sur 2 et C touche sa cible à coup sûr.

— Ces probabilités sont connues de chacun des tireurs.

1. Pourquoi A et B n'ont aucun intérêt à se tirer dessus ?
2. Si personne n'est encore mort, pourquoi C doit tirer sur B ?
3. Que doit faire B ?
4. Quelles sont les chances de survie de A si A tue C ? En déduire que la meilleure chance de A est... de tirer le premier coup en l'air.
5. Quel cow-boy a le plus de chance de remonter à cheval ?

Exercice 24.

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe P dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$.

1. On pose $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner un exemple où P_1 et P_2 ne sont pas inversibles et pourtant $P_1 + iP_2$ est inversible.
2. En considérant l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = det(P_1 + xP_2)$$
Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $P_1 + \lambda P_2$ est inversible.
3. Montrer que :
$$P_1A = BP_1 \qquad\qquad P_2A = BP_2$$
En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k \qquad \text{avec} \quad p \in]0,1[,\ q = 1 - p$$

On considère alors les variables U et V définies par $U = \text{Sup}(X, Y)$ et $V = \text{Inf}(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Expliciter les lois marginales U et V.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 26.

Etudier suivant les valeurs du réel α la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$

Exercice 27.

On considère la suite définie par u_0 quelconque dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sin(u_n)$

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. En utilisant le DL de sin, montrer que :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

3. En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exercice 28.

Notons :

$$F \;=\; \{\, AB - BA \,/\, A,\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\}$$

Le but de l'exercice entre autre est de montrer que $F = Ker(\mathrm{Tr})$ où Tr est la trace matricielle.

1. **Généralités.**
   (a) Déterminer la dimension de $Ker(\mathrm{Tr})$ ainsi qu'une base.
   (b) Montrer que $F \subset Ker(\mathrm{Tr})$
2. **Version soft**. On admettra ici que F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que pour tout i, j de $\{1,\dots,n\}$, avec $i \neq j$ on a E_{ij} et $E_{ii} - E_{11}$ dans F.
   (b) En déduire que $F = Ker(Tr)$
3. **Version normale**. On ne suppose pas ici que F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser sans démonstration que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
   (a) Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de diagonale nulle, et B la matrice diagonale :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 2 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$$

   Montrer que l'on peut trouver A tel que $M = AB - BA$. Vous donnerez les coefficients de A.
   (b) En déduire que $F = Ker(\mathrm{Tr})$

Exercice 29.

Montrer par récurrence que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice ayant des 0 sur la diagonale. On pourra raisonner par récurrence et utiliser sans preuve que tout endomorphisme u de E vérifiant $(x, u(x))$ lié pour tout x de E est une homothétie.

Exercice 30.

Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$f(x) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}dt$$

1. Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2x^2}.\frac{1}{1+u^2}$$

2. Définissons la fonction g_x de $\mathbb{R}$ par :

$$g_x(u) \;=\; -x\,\mathrm{Arctan}(xu) + \mathrm{Arctan}(u)$$

   Calculer g_x'.
3. En déduire que $f'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$, puis donner la valeur de f.
4. En déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}dt \;=\; \frac{\pi}{2}\ln(2) \qquad\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt \;=\; -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$

Exercice 31.

Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(4x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

Exercice 32.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et P dans $\mathbb{R}[X]$ injectif sur $Sp(A)$.

1. Montrer que A est un polynôme en $P(A)$.
2. On note :
$$Com(B) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, BM = MB\}$$
Montrer que $Com(A) = Com(P(A))$

Exercice 33.

Posons :

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y) \qquad \text{et} \qquad D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$$

1. Sans calcul, expliquer pourquoi f admet un maximum sur D.
2. Déterminer la valeur du maximum et en quel point il se trouve.

Exercice 34.

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$xy'' - y' - x^3 y = 0$$

On pourra poser $t = x^2$.

Exercice 35.

Soit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (E_1)$$

une EDL_2.

1. Montrer que si y_0 est solution de (E_1) alors il existe une autre solution du type $\lambda.y_0$ avec λ C^2.
2. En déduire la forme des solutions de (E_1).
3. *Exemple.* Considérons l'équation différentielle :
$$(x^2 + x)y'' + (3x+1)y' + y = 0 \qquad (E_2)$$
Déterminer une solution développable en série entière, puis résoudre (E_2).

Exercice 36.

Soit $u_1, \ldots, u_r$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel vérifiant :

$$\begin{cases} Id = u_1 + \ldots + u_r \\ rg(u_1) + \ldots + rg(u_r) \leq n \end{cases}$$

1. Montrer que $rg(u_1) + \ldots + rg(u_r) = n$. En déduire que $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} Im(u_i)$
2. Montrer que pour tout x de E et pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$:
$$u_i(x) - u_i^2(x) \in \underset{j \neq i}{\oplus} Im(u_j)$$

3. En déduire que $u_1,\ldots,u_r$ sont une famille de projecteurs orthogonaux c'est-à-dire des projecteurs vérifiant :

$$\begin{cases} Id = u_1 + \ldots + u_r \\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\},\ u_i \, o \, u_j = \delta_{ij} u_i \end{cases}$$

Exercice 37.

Soient n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, p dans $]0,1[$ et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant une loi de Bernouilli de paramètre p. Notons U, V dans $\mathcal{M}_{n1}(\{0,1\})$ et M dans $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ définie par :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M = UU^T$$

1. Trouver la loi de $rg(M)$ et de $tr(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
3. Notons S la variable aléatoire $S = V^T MV$. Calculer l'espérance et la variance pour $n = 2$.

Exercice 38.

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher. On pose $N = N_1 + N_2$. On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.

— À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N+1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

— À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc N +2 boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième expérience. Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement :

B_k : "la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche"

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2, puis les probabilités de B_1 et B_2.
2. Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que :

$$P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n-1}.P(X_{n-1} = k)$$

3. Pour k dans $[\![N_1, N_1+n-1]\!]$, déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\bar{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$.
4. En déduire que :

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P\left(B_n \cap (X_{n-1} = k)\right) \frac{k+1}{N+n} + P\left(\bar{B_n} \cap (X_{n-1} = k)\right) \frac{k}{N+n}$$

5. Montrer que : $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.
6. Donner la probabilité de B_n et l'espérance de X_n pour tout n de $\mathbb{N}$.