Espaces préhilbertiens

Exercices supplémentaires

" *Quand l'homme n'aura plus de place pour la nature,*
peut-être la nature n'aura t-elle plus de place pour l'homme."

Stefan Edberg

Niveau 1

Exercice S1.

Soient F et G deux sev d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \qquad\qquad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Exercice S2.

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur l'espace vectoriel F définie par le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice S3.

Soit $(E, <,>)$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \ \ (x/u(x)) = 0$$

1. Montrer que : $\forall x, y \in E,\ (u(x)/y) = -(x/u(y))$.
2. En déduire que : $E = Ker(u) \overset{\perp}{\oplus} Im(u)$.

Exercice S4.

On pose pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$: $(P/Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1+x^2)dx$.

1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Niveau 2

Exercice S5.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel. Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON si et seulement si :

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x/e_k)^2$$

Exercice S6.

On pose pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$: $(P/Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
3. En calculant l'intégrale, déterminer le minimum pour (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

4. Retrouver le résultat en traduisant l'intégrale précédente en terme de distance à un sous-espace.

Exercice S7.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E. Soit $\vec{u}$ le vecteur normé de E de coordonnées (a, b, c) dans la base β.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur $\mathbb{R}\vec{u}$ dans la base β.
2. En déduire la nature de l'endomorphisme q défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ba & -ca \\ -ba & c^2 + a^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

3. En se servant de la question précédente, déterminer la matrice de la projection sur $(e_1 - 2e_2 + e_3)^{\perp}$.

Exercice S8.

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors pour tout x de E, on a :

$$(x/p(x)) = \|p(x)\|^2 \qquad (x/x - p(x)) = \|x - p(x)\|^2$$

2. Soit u la somme de deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de u sont réelles.
3. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0, 2]$.
4. Montrer que

$$\begin{cases} Ker(u) = Ker(p_1) \cap Ker(p_2) \\ Ker(u - 2Id) = Ker(p_1 - Id) \cap Ker(p_2 - Id) \end{cases}$$

Exercice S9.

Soit $M_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel et $\|..\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer que $\|..\|$ est une norme d'algèbre c'est-à-dire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

2. Montrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|A\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad I - A \text{ est inversible}$$

Exercice S10.

Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $T(A) = A^T$.

1. Montrer que T est une symétrie orthogonale. On donnera les éléments caractéristiques.
2. Donner les valeurs propres, espaces propres de T. T est-il diagonalisable ?
3. Déterminer $tr(T)$ et $det(T)$

Exercice S11.

On fixe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts de $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ On définit pour tous P et Q de E :

$$(P/Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer que $(.., ..)$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux $a_0, \ldots, a_n$. Montrer que : $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une BON de E.
3. Déterminer les coordonnées d'un polynôme P quelconque dans la base β. En déduire que : $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.
4. On note :
$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$$
Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer une BON de $H^\perp$.
5. Donner l'image d'un polynôme P de E par la projection orthogonale sur $H^\perp$
6. Calculer la distance de X^n à H.

Niveau 3

Exercice S12.

Soit $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$. De plus on pose pour f et g dans E :

$$(f/g) \;=\; \int_0^1 fg + f'g'$$

1. Montrer que $(..,..)$ est un pse sur E.
2. On pose
$$V = \Big\{ f \in E \;/\; f(0) = f(1) = 0 \Big\} \qquad\qquad W = \Big\{ \; f \in E \;/\; f'' = f \; \Big\}$$
Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.
3. Exprimer le projeté orthogonal sur W d'une application f quelconque de E.
4. On note $E_{ab} \;=\; \Big\{ \; f \in E \;/\; f(0) = a, \; f(1) = b \Big\}$. Montrer que E_{ab} est convexe.
5. Déterminer $\underset{f \in E_{ab}}{inf} \displaystyle\int_0^1 f^2 + {f'}^2$

Exercice S13.

Soit A une matrice de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients (a_{ij}). La matrice $\bar{A}$ désignera la matrice de coefficients $(\bar{a_{ij}})$. On note également :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \;\; \langle A, B \rangle \;=\; tr\left(\bar{A}^T B\right)$$

Partie I. Le produit scalaire hermitien.

1. Montrer que $\langle \;,\; \rangle$ est linéaire à gauche. Que vaut $\langle A, \lambda B + \mu B \rangle$ pour A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ, μ dans $\mathbb{C}$?
2. Exprimer $\langle A, B \rangle$ en fonction de $\langle B, A \rangle$
3. Montrer que $\langle \;,\; \rangle$ est défini positif.

Partie II. Cauchy Schwarz et norme hermitienne. Notons :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \;\; \|A\| \;=\; \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En développant $\|\lambda A + B\|^2$ avec λ dans $\mathbb{R}$, montrer l'inégalité de Cauchy-Scwarz :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \;\; |\langle A, B \rangle| \;\leq\; \|A\| \|B\|$$
dans le cas où $\langle A, B \rangle$ est réel.
2. Notons θ un argument de $\langle A, B \rangle$. En remarquant que $e^{-i\theta} \langle A, B \rangle$ est réel, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre général.
3. Montrer que $\| \;\|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

Partie III. Autres résultats.

1. On note $O_n(\mathbb{C})$ les matrices de E vérifiant : ${}^t\bar{A}A = I_n$. Montrer que $O_n(\mathbb{C})$ est inclus dans la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$.
2. Montrer que pour toute matrice A de $O_n(\mathbb{C})$, les applications de E définie par
$$t_{_A} : M \mapsto AM \qquad\qquad t'_{_A} : M \mapsto MA$$
sont des isométries c'est-à-dire des applications linéaires qui conservent la normes.

Exercice S14.

On rappelle qu'une suite de Cauchy d'un espace vectoriel normée (E, N) est une suite (x_n) vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall p \geq N, \; N(x_p - x_q) \leq \varepsilon$$

Soit $(E, (./.)\,)$ un espace de Hilbert réel de norme euclidienne $\|..\|$, c'est-à-dire un espace pré-hilbertien réel dans lequel les suites de Cauchy sont convergentes. Considérons de plus C un sous-ensemble convexe fermé et non vide de E et x un élément de E. On note :

$$d(x, C) \;=\; \underset{y \in C}{inf} \, \|x - y\|$$

Le but de l'exercice est de montrer que la borne inférieure est atteinte en un unique vecteur appelé la projection orthogonale de x sur le convexe C.

Partie I. Existence du projeté orthogonal

1. Montrer l'existence de $d(x,C)$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe y_n dans C vérifiant : $\|x-y_n\|^2 \le d(x,C)^2 + \frac{1}{n}$
3. Montrer en utilisant l'identité du parallélogramme que pour tout p et q de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left\|y_p - y_q\right\|^2 = 2\left\|y_p - x\right\|^2 + 2\left\|y_q - x\right\|^2 - 4\left\|\frac{y_p+y_q}{2} - x\right\|^2$$

4. En déduire que (y_n) est convergente et que sa limite y est dans C.
5. Montrer que $d(x,C) = d(x,y)$.

Partie II. Unicité du projeté orthogonal

1. On suppose qu'il existe y_1 et y_2 distincts qui réalisent le minimum dans $d(x,C)$. Montrer que :

$$\left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\| < d(x,C)$$

   En déduire que $d(x,C)$ est atteinte pour un unique vecteur.
2. Quel est ce vecteur dans le cas où C est un espace vectoriel de DF ? Ce vecteur est appelé le projeté de x sur le convexe fermé non vide C, on le note $p_C(x)$.

Partie III. Caractérisation du projeté orthogonal

1. Soit λ dans $[0,1]$ et y dans C. Montrer que :

$$\left\|x - (\lambda y + (1-\lambda)p_C(x))\right\|^2 - \left\|x - p_C(x)\right\|^2 = \lambda^2\left\|y - p_C(x)\right\|^2 - 2\lambda\Big(x - p_C(x)\,/\,y - p_C(x)\Big)$$

2. Montrer que $p_C(x)$ est l'unique vecteur y_0 vérifiant :

$$\forall y \in C,\ (x - y_0 / y - y_0) \le 0$$