Suites et séries de fonctions

Exercices supplémentaires

" *Si les miroirs réfléchissaient vraiment, ils ne refléteraient pas n'importe qui.*"

J. Cocteau.

Niveau 1

Exercice S1.

Étudier le mode de convergence des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = nxe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $f_n(x) = e^{-nx}cos(nx)$ sur $\mathbb{R}^+$
3. $f_n(x) = e^{-nx}sin(nx)$ sur $\mathbb{R}^+$
4. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{e^{nx}}$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_n(x) = \dfrac{sin^2(nx)}{n\sin(x)}$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice S2.

Étudier le type de convergence des séries de fonctions de terme général f_n définie par :

1. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+\ln(n)}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$
5. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$
6. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ sur $[0;+\infty[$

Exercice S3.

1. Montrer que si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[a,b]$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $]a,b]$ alors la convergence est uniforme sur $[a,b]$
2. Montrer que si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $I_1,\ldots, I_n$ alors la convergence est uniforme sur $I_1\cup\ldots\cup I_n$.

Exercice S4.

Considérons les fonctions f_n définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Identifier la limite f.
2. Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$. Identifier la limite g.
3. En déduire que la suite (f_n') ne converge pas uniformément.
4. A-t-on $f' = g$?

Niveau 2

Exercice S5.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit l'application f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n^2}] \\ \sqrt{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f_n et $\frac{n}{2}$-lipschitzienne.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une application f qui n'est pas lipschitzienne,

Exercice S6.

Soit (f_n) une suite d'applications λ-lipschitziennes d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une application f. On va montrer que la convergence est uniforme. Pour cela considérons ε dans $\mathbb{R}_+^*$ et $(x_1,\ldots,x_p)$ une subdivision régulière de $[a,b]$ telle que :

$$\frac{b-a}{p} \leq \frac{\varepsilon}{3\lambda}$$

1. Montrer que f est λ-lipschitzienne.
2. Justifier l'existence d'un N tel que :

$$\forall n \geq N,\ \ \forall k \in \{0,\ldots,p\},\quad \left| f_n(x_k) - f(x_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

3. Soit x dans $[a,b]$ et k tel que $x_k \leq x \leq x_{k+1}$. Montrer que :

$$|f(x) - f_n(x)| \ \leq\ 2M|x - x_k| + |f(x_k) - f_n(x_k)|$$

4. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f.
5. Supposons dans cette partie que (g_n) est une suite de $C^1([a,b],\mathbb{R})$ qui converge simplement. Supposons de plus qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|g_n'\|_\infty \leq M$$

   Montrer que la convergence de (g_n) est uniforme.

Exercice S7.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et ϕ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons de plus (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I vers une application f.

1. Montrer la convergence de $\phi\, o\, f_n$ vers $\phi\, o\, f$ n'est pas nécessairement uniforme.
2. Montrer que si ϕ est lipschitzienne alors la convergence est uniforme.
3. Montrer que $\dfrac{f_n}{1+f_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} \dfrac{f}{1+f^2}$

Niveau 3

Exercice S8.

Cet exercice utilise le premier théorème de Dini que l'on rappelle ici :

Théorème de Dini 1. Si (f_n) est une suite **croissante** de fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$ qui converge vers f continue, alors la convergence est uniforme.

On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases} \qquad\qquad f(x) = e^{-x}$$

Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$ et posons A tel que $e^{-A} < \varepsilon$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers f.
2. En étudiant la fonction $g = ln\, o\, f_{n+1} - ln\, o\, f_n$ sur $[0,n[$, montrer que la suite (f_n) est croissante.
3. En déduire grâce au théorème de Dini que la convergence est uniforme sur $[0,A]$.
4. En déduire que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice S9.

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes convergeant vers une fonction f continue, sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On se propose de montrer que la convergence est uniforme.

1. Montrer que f est croissante.
2. Soit ε dans $\mathbb{R}_+^*$. On choisit p dans $\mathbb{N}$ tel que :

   $$\frac{f(b)-f(a)}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   puis on effectue une subdivision régulière $(y_0,\ldots,y_p)$ de $[f(a),f(b)]$. Montrer que :

   $$\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ \ |y_k - y_{k-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Pour k dans $\{0,\ldots,p\}$, montrer que y_k a un antécédent noté x_k. Pour k dans $\{1,\ldots,p\}$, posons $I_k = [x_{k-1},x_k]$.
4. Justifier l'existence d'un N tel que pour tout $n \geq N$:

   $$\forall k \in \{0,\ldots,p\},\ \ |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

5. En discutant suivant le signe de : $f(x) - f_n(x)$, montrer que pour $n \geq N$, on a :

   $$\forall k \in \{0,\ldots,p\},\ \forall x \in I_k,\ \ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

   En déduire que la convergence de (f_n) vers f est uniforme.