Probabilité

Exercices supplémentaires

" *Le café est un breuvage qui fait dormir, quand on n'en prend pas.* "

A. Allais

Niveau 1

Exercice S1.

Deux joueurs A et B lancent deux dés à tour de rôle. Le premier A commence. Il gagne s'il fait la somme des ses dés fait au moins 7. S'il perd, le joueur B lance les 2 dés. Il gagne si la somme fait au moins 6. Sinon on recommence et le joueur A gagne s'il fait au moins 7…À qui le jeu est-il le plus favorable ?

Exercice S2.

On lance deux fois trois dés indiscernables à six faces . Notons les événements :

A : "Lors du premier lancer, les 3 dés sont identiques"
B : "Lors du premier lancer, 2 des 3 dés sont identiques"
C : "Lors du premier lancer, les 3 dés sont différents"
V : "Le deuxième lancer est identique au premier"

1. Déterminer les probabilités $p(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. En déduire $p(V)$.
3. Recalculer $p(V)$ si les dés sont de couleurs différentes.

Exercice S3.

Soient E un ensemble de cardinal n et A, B des sous-ensembles de E. Combien existe-t-il de :

1. couples (A,B) ?
2. couples (A,B) vérifiant $A \cap B = \varnothing$?
3. couples (A,B) vérifiant $A \cup B = E$?
4. couples (A,B) formant une partitions de E (On permet à A ou B d'être vides) ?

Exercice S4.

D'une urne contenant 3 pièces dont 2 sont truquées, on extrait une pièce avec laquelle on joue à pile ou face. On suppose que la probabilité d'obtenir pile avec l'une des pièces truquées est 0,3, et est 0,4 avec l'autre. Sachant que la pièce a amené 3 fois de suite face, quelle est la probabilité qu'elle soit truquées ?

Exercice S5.

Soient p dans $[0, 1]$ et X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$P(X = n) = p.P(X \geq n)$$

Déterminer la loi de X.

Exercice S6.

On considère N urnes contenant chacune n jetons numérotés de 1 à n. On extrait au hasard un jeton de chaque urne.

1. Quelle est la probabilité que le plus petit des numéros tirés soit supérieur ou égal à k.
2. Quelle est la probabilité que le plus petit des numéros tirés soit égal à k.

Niveau 2

Exercice S7.

Trois personnes A, B et C jouent une suite de parties. A et B commencent. Le perdant s'efface et laisse les deux autres jouer. Le gagnant est celui qui gagne deux fois de suite. On supposera chaque partie équitable, c'est-à-dire la probabilité de gagner est $\frac{1}{2}$. Notons :

$$\begin{array}{rl} A_1 : & \text{"Le joueur } A \text{ gagne la première partie"} \\ B_1 : & \text{"Le joueur } B \text{ gagne la première partie"} \\ V_A, V_B, V_C : & \text{"Le joueur } A \text{ (resp. } B\text{, } C\text{) gagne."} \end{array}$$

1. Calculer $p(V_A|A_1)$, $p(V_B|A_1)$ et $p(V_C|A_1)$.
2. Par symétrie en déduire $p(V_A|B_1)$, $p(V_B|B_1)$ et $p(V_C|B_1)$.
3. Quelle est la probabilité de gagner pour chacun ?

Exercice S8.

Soient p et q dans $]0, 1[$. Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge, passe au vert avec la probabilité p et, lorsqu'il est vert, passe au rouge avec une probabilité q. On note v_n la probabilité que le feu soit vert à l'instant n et r_n la probabilité qu'il soit rouge.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$\begin{cases} r_{n+1} = (1-p).r_n + qv_n \\ v_{n+1} = p.r_n + (1-q)v_n \end{cases}$$
2. En déduire l'existence d'une matrice A vérifiant pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$X_{n+1} = A.X_n \qquad \text{avec} \qquad X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$$
3. Déterminer des matrices B et C telles que :
$$\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$$
4. Montrer que B et C sont les matrices de deux projections associées. En déduire A^n.
5. En déduire r_n et v_n en fonction de n, puis leurs limites. Commenter.

Exercice S9.

1. Déterminer la plus petite tribu sur $\mathbb{N}$ contenant les ensembles $\{n, n+1, n+2\}$ avec n dans $\mathbb{N}$.
2. Soit A un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}$ non vide. Déterminer la plus petite tribu contenant A.

Exercice S10.

Soit N dans $\mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ et p dans $]0,1[$. Un joueur effectue une série de manches indépendantes. A chaque manche, il gagne 1 euros avec la probabilité p et perd 1 euro avec la probabilité $q = 1-p$. Le jeu prend fin lorsque le joueur a accumulé N euros ou lorsqu'il est ruiné. On note u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k euros au départ.

1. Déterminer u_0 et u_N et montrer que pour tout k de $\{1,\dots,N-1\}$:
$$u_k = p.u_{k+1} + q.u_{k-1}$$
2. Montrer que si $p \neq q$, on a :
$$u_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
que se passe-t-il si N tend vers $+\infty$?
3. Reprendre les questions si $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice S11.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 est composée de 3 boules blanches et 1 boule noire ; au contraire de l'urne U_2 est composée de 3 boules noires et 1 boule blanche. On lance une pièce de monnaie truquée ayant un probabilité de faire face égale à $\frac{2}{3}$

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois face.

— si le nombre de lancer nécessaire à l'obtention de 'face' est impair alors on tire une boule dans l'urne U_1.

— si le nombre de lancer nécessaire à l'obtention de 'face' est pair alors on tire une boule dans l'urne U_2.

Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche.

Exercice S12.

On lance un dé indéfiniment. On note X la variable aléatoire égale au rang d'obtention du premier 6 et Y la variable aléatoire égale au rang d'obtention du deuxième 6.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y sachant $(X = k)$
3. Déterminer la loi conjointe (X, Y).
4. En déduire la loi de Y.

Exercice S13.

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Pour n dans $\mathbb{N}$, on note :

On note A_n l'événement : " l'animal est en A après son $n^{ième}$ trajet".
On note B_n l'événement : " l'animal est en B après son $n^{ième}$ trajet".
On note C_n l'événement : " l'animal est en C après son $n^{ième}$ trajet".

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(Cn)$.

1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que A est diagonalisable

3. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes V et W vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = V + \left(-\frac{1}{2}\right)^n W$$

4. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Niveau 3

Exercice S14.

1. Soient A et B des événements d'une expérience aléatoire. Montrer que :

$$P(A \cup B) + P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup B) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3 = 2^2 - 1$$

2. Généralisation. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'une expérience aléatoire. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des n-uplets $(B_1, \dots, B_n)$ où pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ on a $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$. Montrer que :

$$\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\mathcal{T}_n} P(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = 2^n - 1$$

Exercice S15.

Une rampe verticale de spots nommés A, B C et D change d'état de la manière suivante : à l'instant $t = 0$ seul le spot D est allumé, puis :

Lampe allumée à l'instant n	Lampe allumée à l'instant $n+1$
A	B
B	C
C	D
D	Une des 4 lampes au hasard.

1. On note E_n l'événement : "le spot D reste constamment allumé jusqu'à l'instant n". Calculer (E_n).
2. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot C s'allume. Déterminer la loi de X.
3. On note a_n (resp. b_n, c_n et d_n) la probabilité qu'à l'instant n la lampe A (resp. B, C et D) est allumé. De plus on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

   En déduire qu'il existe une Matrice M vérifiant $X_{n+1} = MX_n$