Réduction des endomorphismes

Exercices supplémentaires

" Le temps est une drogue.
À haute dose, elle tue."

T. Pratchet

Niveau 1

Exercice S1.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A-2I)^2$. En déduire A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice S2.

Est-ce que l'endomorphisme ϕ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par :

$$\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

est diagonalisable ?

Exercice S3.

Soient a dans $\mathbb{C}$, b dans $\mathbb{C}^*$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Étudier la diagonalisabilité de A et déterminer ses sous espaces propres.

Exercice S4.

1. Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.
2. Montrer qu'une matrice est de rang 1 si et seulement si elle est le produit d'une matrice colonne non nulle par une matrice ligne non nulle.
3. Montrer que si A est une matrice de rang 1 alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = tr(A)^{n-1}A$.
4. Redémontrer la question 1, en utilisant la question 3.

Exercice S5.

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Déterminer les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = A^2$ et $tr(A) = 0$.
2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $tr(A) \in \mathbb{N}$ et $0 \leq tr(A) \leq 4n$.
3. Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $det(A) > 0$.

Exercice S6.

Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E de DF vérifiant : $(f - Id)^3 o (f - 2Id) = 0$ et $(f - Id)^2 o (f - 2Id) \neq 0$
L'application f est elle diagonalisable ?

Exercice S7.

Résoudre $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice S8.

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer un polynôme annulateur scindé à racines simples annulateur de A.
3. En déduire A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice S9.

Déterminer les vp et les Vp de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Niveau 2

Exercice S10.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Montrer que :

$$a_0 \chi_{A^{-1}} = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + 1$$

On pourra si nécessaire montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, $X^n P(\frac{1}{x})$ est un polynôme et déterminer ses coefficients de fonction des coefficients de P.

Exercice S11.

Soit A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Notons B la matrice définie par bloc :

$$B \;=\; \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

1. Déterminer une relation entre $\chi_{_A}$ et $\chi_{_B}$. En déduire que $Sp(A) = Sp(B)$.
2. Montrer que pour tout polynôme scindé à racines simples P sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \text{Rac}(P),\;\; xP'(x) = 0 \implies x = 0$$

   où $\text{Rac}(P)$ désigne l'ensemble des racines de P.
3. Montrer que pour :

$$\forall n \in \mathbb{N},\;\; B^n \;=\; \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array}\right)$$

4. En déduire que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right)$$

5. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Exercice S12.

Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Montrer que si A est inversible alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
2. Dans la suite, A est une matrice non nécessairement inversible. Posons pour y dans $\mathbb{K}$:

$$f_y(x) \;=\; det((A - xI_n)B - yI_n) \;-\; det(B(A - xI_n) - yI_n)$$

   Expliquer sommairement pourquoi f_y est une fonction polynôme.
3. Montrer que f_y est nulle sur $\mathbb{K} \setminus Sp(A)$, puis sur $\mathbb{K}$.
4. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Exercice S13.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de DF tel que $u^3 = u^2$, mais $u \neq Id$, $u^2 \neq 0$ et $u^2 \neq u$.

1. Quelles sont le vp de u.
2. u est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $E = Im(u^2) \oplus Ker(u^2)$
4. Notons $F = Im(u^2)$. Montrer que $u_{_F} = Id_{_F}$, où $u_{_F}$ est l'endomorphisme induit par u sur F.

Exercice S14.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Une racine carrée de A est une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = R.R$. Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inférieur ou égale à n. On pourra si nécessaire utiliser Cayley-Hamilton. En déduire que A n'a pas de racine carrée.

2. Montrer que B a une infinité de racines carrées.
3. Soit R une racine carrée de C. Montrer que R est diagonale. En déduire que C a un nombre fini de racines carrées.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices ayant une unique racine carrée pour $n \geq 2$.

Niveau 3

Exercice S15.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La matrice échiquier de taille $2n$ est la matrice M_n ayant pour coefficient $m_{ij} = 1$ si $i+j$ est paire, 0 sinon. Ainsi :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de M_n
2. Calculer M_n^2. En déduire que M_n est diagonalisable et qu'il existe 2 valeurs propres 0 et une notée λ.
3. Déterminer une base des espaces propres de M.
4. Montrer que ces espaces propres sont orthogonaux.
5. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur E_λ puis sur E_0.
6. Écrire en langage Python, une fonction qui renvoie la liste des matrices échiquiers pour n dans $\{1, \dots, 100\}$

Exercice S16.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = A.M$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ et tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $P(f)(M)$. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
2. Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, notons :
$$\beta_i = (E_{1i}\ ,\ \dots\ ,\ E_{ni}) \qquad \text{et} \qquad F_i = \text{vect}(\beta_i)$$
Montrer que F_i est stable par f, puis déterminer la matrice de f_{F_i} dans β_i.
3. Soit $\beta = (E_{11}, E_{21}, E_{31} \dots, E_{nn})$. Montrer
$$[f]_\beta = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array}\right)$$
4. Déterminer le rang de f en fonction du rang de A.
5. Déterminer χ_f , $tr(f)$ et $det(f)$.