Séries numériques

Exercices supplémentaires

" *Ceux qui rêvent le jour auront toujours*
un avantage sur ceux qui rêvent la nuit... "

E.A. Poe

Niveau 1

Exercice S1.

Déterminer la nature des séries de terme général :

$a)\quad \dfrac{n!}{n^n}$	$b)\quad \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$c)\quad n^{\frac{1}{n}}-1$
$d)\quad \dfrac{1}{\ln(n!)}$	$e)\quad \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}$	$f)\quad \dfrac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}}$
$g)\quad \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n-1$	$h)\quad \dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$	$i)\quad \cos\left(\pi n+\dfrac{1}{n}\right)$
$j)\quad \sin\left(\pi n+\dfrac{1}{n}\right)$	$k)\quad \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$	$l)\quad \dfrac{1}{2^{\ln(n)}}$

Exercice S2.

Soit α dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. Etudier la nature des séries suivantes. Dans le cas où la série est convergente, déterminer sa limite :

$$1)\quad \sum \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) \qquad 2)\quad \sum \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \qquad 3)\quad \sum \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)$$

Exercice S3.

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites de $\mathbb{R}$ tels que $u_n \le v_n \le w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que si les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, alors il en est de même pour $\sum v_n$.

Niveau 2

Exercice S4.

Montrer que la série $\sum \frac{[\sqrt{n+1}]-[\sqrt{n}]}{n}$ est convergente ; la notation $[x]$ désignant la partie entière de x. Déterminer sa limite.

Exercice S5.

Posons :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad\qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$$

1. Montrer que $\sum a_n$ est convergente.
2. Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
3. En déduire que $\sum b_n$ est divergente
4. Vérifier que l'on a bien $a_n \sim b_n$ et pourtant $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ne sont pas de même nature. Que manque-t-il ?

Exercice S6.

Soit (a_n) une suite décroissante de $\mathbb{R}$ tels que la série $\sum a_n$ converge.

1. Notons (R_n) la suite des restes de cette série, c'est-à-dire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} 0 \leq (2n)a_{2n} \leq 2R_n \\ 0 \leq (2n+1)a_{2n+1} \leq 2R_n \end{cases}$$
3. En déduire que $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
4. En considérant la suite $a_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et $a_n = 0$ sinon, montrer que l'hypothèse (a_n) décroissante est indispensable.

Exercice S7.

Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Exprimer F_n en fonction de n. En déduire un équivalent de F_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
3. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice S8.

Soient α et β dans $\mathbb{R}$, posons :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

Les séries (S_n) sont appelées les séries de Bertrand. Montrer que cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Niveau 3

Exercice S9.

Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$. Notons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Déterminer la nature de la série $\sum a^{H_n}$.

Exercice S10.

Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles et notons . Supposons :

$$\begin{cases} (a_n) \text{ est une suite décroissante} \\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \sum b_n \text{ est bornée.} \end{cases}$$

Partie I - Le théorème d'Abel. Notons $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$
2. Montrer que la série $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ est absolument convergente.
3. En déduire que $\sum a_k b_k$ est convergente.

Partie II - Applications.

1. Montrer que la suite définie par $b_k = (-1)^k$ vérifie les hypothèses du théorème. De quel théorème le théorème d'Abel est-il la généralisation ?
2. Pour quelles valeurs de x, la suite définie par $b_k = \cos(kx)$ vérifie les hypothèses du théorème (Même question pour $b_k = \sin(nx)$)
3. Donner la nature des séries suivantes :
$$\sum \frac{\cos(n)}{n} \qquad \sum \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{(-1)^{[n/2]}}{\ln(n)}$$

Exercice S11.

Soit (a_n) une suite de $\mathbb{C}$ et (n_i) une suite de $\mathbb{N}$ vérifiant $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. Notons :

$$\begin{cases} w_k = a_{n_k} + a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \ldots + a_{n_{k+1}-1} = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i \\ W_k = |a_{n_k}| + |a_{n_k+1}| + |a_{n_k+2}| + \ldots + |a_{n_{k+1}-1}| = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_i| \end{cases}$$

Partie I - Le théorème. Supposons que la série $\sum w_k$ soit convergente et que $W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le but est de montrer que $\sum a_k$ est convergente et a la même limite que $\sum w_k$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}$. Justifiez l'existence d'un unique entier $p(k)$ vérifiant :
$$n_{p(k)} \le k < n_{p(k)+1}$$
Que peut-on dire de la limite de la suite $(p(k))$ en $+\infty$?

2. Soit l la limite de la série $\sum w_n$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\left| l - \sum_{i=0}^{k} a_i \right| \leq \left| l - \sum_{i=0}^{p(k-1)} w_i \right| + W_{p(k)}$$

3. Conclure.

Partie II - Une application. Montrer que

$$\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{2^{[\sqrt{n}]}}$$

est convergente et déterminer sa somme. On rappelle que $[x]$ est la partie entière de x. On pourra poser $n_i = i^2$

Exercice S12.

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ des séries à termes positifs vérifiant $u_k \sim v_k$. On rappelle que dans ces conditions les séries $\sum u_k$ et $\sum u_k$ sont de même nature. On veut montrer que :

- En cas de convergence, les restes sont équivalents.
- En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Partie I. Le théorème.

1. Soit ε dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un rang N tel que :

$$\forall n \geq N, \; |u_k - v_k| \leq \varepsilon v_k$$

2. Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Montrer que pour tout $n \geq N$ de $\mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

En déduire que les restes sont équivalents.

3. Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. Montrer que pour tout $n \geq N$ de $\mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - v_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^{n} v_k$$

En déduire que les sommes partielles sont équivalentes.

Partie II. Des applications. En utilisant le résultat précédent avec les suites :

1. $u_k = \frac{1}{k}$ et $v_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. $u_k = \frac{1}{k^2}$ et $v_k = -\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.
3. $u_k = \frac{1}{2k^2}$ et $v_k = c_k - c_{k+1}$ avec $c_k = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma$ où γ est la constante d'Euler, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \sim \frac{1}{2n}$$