Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Exercices supplémentaires

" *Tout est difficile avant de devenir facile.*"

T. Fuller

Niveau 1

Exercice S1.

Soit f et g des endomorphismes de E tels que $f\,o\,g = Id_E$.

1. Montrer que si E est de DF alors f et g sont bijectives.
2. Montrer qu'en DI, on peut avoir f ou g non bijectives.

Exercice S2.

Le but de l'exercice est de chercher l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les autres. Cet ensemble est appelé le centre de $M_n(\mathbb{R})$.

Considérons une matrice A dont les coefficients sont notés par les réels (a_{ij}). De plus pour tout i et j de $\{1,\dots,n\}$, on note par E_{ij} la matrice élémentaire contenant des 0 partout sauf à la ligne i et la colonne j où elle contient un 1.

1. Montrer que $E_{1i}AE_{j1} = a_{ij}E_{11}$ pour tout i,j de $\{1,\dots,n\}$.
2. En déduire que A est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $A = \lambda.I_n$

Exercice S3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(f^n)$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+1}) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f^{n+1}) = \mathrm{Im}(f^{n+2})$
3. Montrer que si $\dim(E) = 3$ alors $\mathrm{rg}(f^3) = \mathrm{rg}(f^4)$.

Exercice S4.

Trouver u, v et w les nombres complexes de modules 1 tels que $\begin{cases} u+v+w=1 \\ u.v.w=1 \end{cases}$

Niveau 2

Exercice S5.

On note Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est une application linéaire.
2. Montrer qu'une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ périodique est constante. En déduire le noyau de Δ.
3. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P
4. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ à la source et $\mathbb{R}_n[X]$ au but. Montrer que Δ_n est surjective pour tout n de $\mathbb{N}$.
5. Montrer que Δ est surjective.

Exercice S6.

Soit E un k-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est une projection alors $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. L'endomorphisme f est à présent quelconque, montrer que

$$\begin{array}{rcl} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} & \iff & Ker(f) = Ker(f^2) \\ E = Ker(f) + Im(f) & \iff & Im(f) = Im(f^2) \end{array}$$

3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Montrer que :

$$Ker(f) = Ker(f^2) \iff Im(f) = Im(f^2)$$

   En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice S7.

Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-ev E. Supposons de plus u nilpotent.

1. Montrer que $u\, o\, v$ n'est pas forcément nilpotent.
2. On suppose dans le reste de l'exercice que u et v commutent. Montrer que $u\, o\, v$ est nilpotent.
3. Montrer que $I_E - \lambda.u$ est inversible pour tout λ de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si v est inversible alors $u + v$ est inversible. On pourra exprimer $u + v$ comme une composée.
5. Montrer la réciproque de la proposition précédente.

Exercice S8.

1. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.
2. Soit f dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si f n'est pas constante alors $(1, f, f^2, \ldots, f^n)$ est libre pour tout n de $\mathbb{N}$. Ici f^n signifie $f \times \ldots \times f$.

Exercice S9.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On considère les déterminants $n \times n$ suivants :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n+1 \end{vmatrix} \qquad E_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad F_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

Ainsi le déterminant D_n ne contient que des 1 sauf sur la diagonale où il y a 2, 3, …, $n+1$. Le déterminant E_n est identique à D_n sur les $n-1$ premières lignes et ne contient que des 1 sur la dernière ligne. Enfin le déterminant F_n est aussi identique à D_n sur les $n-1$ premières lignes et contient des 0 sur la dernière sauf sur la diagonal où il y a n.

1. Calculer E_2, E_3, E_4, puis enfin E_n pour n quelconque.

2. Exprimer F_n en fonction de D_{n-1}.
3. Expliquer pourquoi $D_n = E_n + F_n$. En déduire une relation de récurrence sur les D_n.
4. Posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $D_n = (1 + H_n)n!$

Exercice S10.

Soient E_1,. . .,E_n des sev d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

1. Montrer que $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ si et seulement s'il existe une famille $(p_1, \ldots, p_n)$ de projections de E vérifiant pour tout i et j de $\{1, \ldots, n\}$:
   - $Id = p_1 + \ldots + p_n$
   - $p_i \, o \, p_j = 0$ si $i \neq j$.
   - $Im(p_i) = E_i$.
2. Montrer que cette famille de projections est unique.

Exercice S11.

Notons (U_n) la suite de polynômes définies par la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1}$$

avec $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$ (C'est la même relation de récurrence que pour les polynômes de Tchebychev).

1. Montrer que les propositions :

$$\begin{cases} P_1 : & \forall n \in \mathbb{N}, \exists V_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, \sin(nx) = V_n(\sin(x)) \\ P_2 : & \forall n \in \mathbb{N}, \exists V_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, \sin(nx) = V_n(\cos(x)) \end{cases}$$

   sont fausses.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sin(nx) = \sin(x)U_n(\cos(x))$$

3. Que peut-on dire du degré et du coefficient dominant de U_n ?

Exercice S12.

Soient M et J les matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} r_1 & a & \ldots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \ldots & b & r_n \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

On note également P le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (r_k - X)$$

1. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{R}$, il existe α et β réels tels que

$$det(M + \lambda J) = \alpha + \lambda\beta$$

2. En déduire à l'aide de P la valeur de $det(M)$ dans le cas où a et b sont distincts.
3. Calculer $det(M)$ si $a = b$. On admettra ici que le déterminant est continue et donc que l'on peut inverser les symboles lim et det.

Exercice S13.

Soient a, b et c dans $\mathbb{K}$ et :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

1. Déterminer une relation récurrente vérifiée par Δ_n.
2. Calculer Δ_n dans les cas suivants :

   a) $a = 4,\ b = 3,\ c = 1$ *b*) $a = 2,\ b = 1,\ c = 1$ *c*) $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

Niveau 3

Exercice S14.

Pour tout n de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$, on désigne par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-2 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de coefficients (a_{ij}) tous nuls sauf ceux tels que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, a_{k+1,k} = n-k, a_{k,k+1} = k$$

Ainsi pour les premières valeurs de n, on a :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les déterminants de A_2, A_3, A_4 et A_5.
2. On désigne par ϕ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par :

   $$\phi(P) = (n-1)XP(X) + (1-X^2)P'(X)$$

   où P' désigne la dérivée du polynôme P. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
3. Calculer $\phi(X^k)$. Comparer la matrice de ϕ dans $\beta = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ et la matrice A_n.
4. On définit pour tout h de $\{1, \dots, n-1\}$ le polynôme $P_h = (X-1)^h(X+1)^{n-1-h}$ et le réel $\lambda_h = n-1-2h$. Montrer que $\phi(P_h) = \lambda_h P_h$ pour tout h de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.
5. Notons $\beta' = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$. Montrer en utilisant le résultat de la question précédente que β' est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.
7. En déduire le déterminant de A_n puis les valeurs de n pour lesquelles on a A_n inversible ?

Exercice S15.

On considère φ un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(MN) \ = \ \varphi(M)\varphi(N)$$

De plus, pour tous i, j dans $[\![1, n]\!]$, on note :

- E_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1.
- $U_{ij} = \varphi(E_{ij})$
- u_{ij} l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à U_{ij}

1. Soient i, j, k et l dans $[\![1, n]\!]$. Rappeler sans démonstration de la valeur de $E_{ij} \times E_{kl}$. En déduire que :

$$u_{ij}\, o\, u_{kl} \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ u_{il} & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

2. Montrer qu'il existe x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $u_{11}(x) \neq 0$. On note $e_i = u_{i1}(x)$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$.
3. Montrer que la famille $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
4. Soient i et j dans $[\![1, n]\!]$. Déterminer la matrice de u_{ij} dans la base β.
5. En déduire qu'il existe une matrice inversible P vérifiant :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(E_{ij}) \ = \ P^{-1} E_{ij} P$$

6. Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = P^{-1} M P$$