Intégrales généralisées

Exercices supplémentaires

" Une banque vous prête un parapluie quand il fait beau et vous le reprend quand il pleut."

G.B. Shaw

Niveau 1

Exercice S1.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$I_1 = \int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^b} dt \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \ln(t) dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1} dt \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} (x - \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x} dx \qquad I_8 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt \qquad I_9 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$I_{10} = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \qquad I_{11} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\ln|t|} dt \qquad I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$$

$$I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx \qquad I_{14} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \qquad I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(x)}{x^2} dx$$

Exercice S2.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Déterminer la nature de

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b(x)} dx$$

Exercice S3.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales de Wallis par : $W_n = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^n(x)dx$

1. Calculer W_0 et W_1 puis montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $W_n = \dfrac{n-1}{n}W_{n-2}$.
2. Montrer que (W_n) est une suite décroissante et que $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)dx$.
3. En déduire que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que $W_n \sim W_{n+1}$.
5. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Niveau 2

Exercice S4.

Pour tous réels a et b distincts, on pose :

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}dx$$

1. Justifier la convergence de I.
2. Montrer que I ne dépend pas de a et b. On pourra poser : $X = 2\frac{(x-a)}{b-a} - 1$
3. En déduire la valeur de I.

Exercice S5.

Posons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}dt \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$$

1. Montrer que I et J convergent.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$ en effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$. En déduire la valeur de I.

Exercice S6.

Soit f une application continue de $[1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergente.

1. Montrer que les primitives de f sont bornées.
2. Montrer $\int_1^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}dt$ convergente.

Niveau 3

Exercice S7.

Notons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx \;=\; \int_t^{2t} \frac{e^{-y}}{y} dy$
3. Calculer : $\displaystyle\int_t^{2t} \frac{1}{x} dx$. En déduire la valeur de I.

Exercice S8.

Soient a et b des réels strictement positif. Posons

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t} dt$$

1. Justifier l'existence de J.
2. Montrer que pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\frac{b\varepsilon}{a}} \frac{\cos(at)}{t} dt \;=\; \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
3. En déduire la valeur de J.
4. Déterminer $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t} dt$

Exercice S9.

1. Montrer que si f est une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx \;=\; 0$$
2. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons :
$$J_n \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx \qquad\qquad K_n \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$$
Montrer que (J_n) est une suite constante. En déduire la valeur de J_n.
4. Montrer que $K_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.
5. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Exercice S10.

Soit f dans $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et c dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f''(x) \geq c > 0$$

Montrer qu'il existe a dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\dfrac{1}{f}$ soit intégrable sur $[a; +\infty[$