Chap. 1

Intégrales généralisées

PSI

Exercices de référence

Exercice R1 - Intégrales de Dirichlet.

Soit α dans $\mathbb{R}$. Notons :

$$D_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1. Soit β dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout α de $\mathbb{R}$, l'intégrale D_α est de même nature que :

$$S_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha} dt$$

   On pourra remarquer (aucune preuve demandée) et utiliser qu'on a, dans chaque question, un résultat similaire en remplaçant *sin* par *cos*.
2. Si $\alpha > 1$, montrer que D_α est absolument convergente.
3. Si $\alpha \in]0,1]$, montrer que :
   — D_α est convergente.
   — D_α n'est pas absolument convergente. On pourra utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$.
4. Si $\alpha \leq 0$, montrer que D_α est divergente. On pourra montrer que la suite (a_n) ne tend pas vers 0 avec :

$$a_n = \int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice R2.

Pour f et g dans $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, posons

$$(f/g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

1. Montrer que l'intégrale définissant $(\dots/\dots)$ converge.
2. Montrer que $(\dots/\dots)$ est un produit scalaire sur E.
3. Pourquoi $(\dots/\dots)$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice R3 - Calcul de l'intégrale de Gauss.

L'intégrale de Gauss est définie par :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. Montrer la convergence de I.
2. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que pour tous n de $\mathbb{N}^*$ et t de $[0,\sqrt{n}[$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

3. Posons $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

4. On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

Exercices de référence

Exercice R4.

Soient λ_0, ..., λ_n dans $\mathbb{C}$. Posons

$$V(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \qquad VP(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1+\lambda_0 & 1+\lambda_0^2 & \dots & 1+\lambda_0^n \\ 2 & 1+\lambda_1 & 1+\lambda_1^2 & \dots & 1+\lambda_1^n \\ 2 & 1+\lambda_2 & 1+\lambda_2^2 & \dots & 1+\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 1+\lambda_n & 1+\lambda_n^2 & \dots & 1+\lambda_n^n \end{vmatrix}$$

1. Montrer que :
$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{0\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$
En déduire que $V(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq 0$ si et seulement si les $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont distincts.
2. Montrer que :
$$VP(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = 2.V(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Exercice R5.

On définit la suite des polynômes de Tchebychev (T_n) par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^, \ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

1. Montrer que :
$$\forall n\mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ cos(n\theta) = T_n(cos\theta) \qquad (*)$$
2. Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant la relation $(*)$.
3. Calculer T_5 avec la relation de récurrence, puis avec la relation $(*)$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n,
5. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n scindé et à racines simples.
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} si $n \ge 1$. En déduire la forme factorisée de T_n.

Exercice R6.

Soient n dans $\mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts.

1. Pour tout i dans $\{0,\dots,n\}$, il existe un unique polynôme L_i de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour tout j de $\{0,\dots,n\}$. Ce polynôme vaut :
$$L_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$
2. La famille $(L_0,\dots,L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont :
$$(P(a_0), P(a_1),\dots,P(a_n))$$
En d'autres termes, on a :
$$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + \dots + P(a_n)L_n$$
4. En particulier, on a : $L_0 + L_1 + \dots + L_n = 1$

Séries numériques

Exercices de référence

Exercice R7.

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}} \qquad \sum \frac{1}{n^{\cos(\frac{1}{n})}} \qquad \sum \frac{1}{n^{\mathrm{ch}(\frac{1}{n})}} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$$

Exercice R8.

Posons :

$$H_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{n} \qquad U_n = H_n - \ln(n) \qquad V_n = H_n - \ln(n+1)$$

Version A.

1. Montrer que : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $U_{n-1} - U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$
3. En déduire que (U_n) est convergente. Sa limite est notée γ, c'est la constante d'Euler.

Version B.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer la monotonie de (U_n) et (V_n).
2. En déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite. Leur limite est notée γ, c'est la constante d'Euler.
3. Montrer que $|U_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.
4. Écrire un programme Python permettant de calculer γ avec la précision souhaitée.

Exercice R9.

On rappelle quelques informations sur l'intégrale de Wallis :

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

De plus, posons :

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - u_{n+1}$$

1. Montrer que $v_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1$
2. En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que (u_n) est convergente.
4. Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = e^{u_n}$. Montrer que

$$\frac{\sqrt{2}w_{2n}}{w_n^2} = \sqrt{n}\frac{2}{\pi}I_{2n}$$

5. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Réduction des endomorphismes

Exercices de référence

Exercice R10.

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$
2. Déterminer un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.
3. En déduire A^n.

Exercice R11.

Soit A dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $Tr(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer la liste des vp de A ainsi que leur multiplicité. En déduire une matrice D diagonale semblable à A.
3. Donner tous les polynômes annulateurs de A.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I.

Exercice R12.

Considérons la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer A telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice R13.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples.

Exercices de référence

Exercice R14.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face. Montrer que l'événement A="le jeu s'arrête" est presque sûr. Pourtant cela ne signifie pas que le jeu se finisse.

Exercice R15.

On dispose de 2 dés à 6 faces, un parfaitement équilibré et un faisant 6 systématiquement. On choisit un dé au hasard, puis on le lance.

1. Quelle est la probabilité de faire 6 ?
2. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé sachant que l'on a fait 6 ?

Exercice R16.

Trois joueurs A, B et C jouent au ballon :

— Le joueur A passe le ballon à B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
— Le joueur B passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
— Le joueur C passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

Considérons les événements suivant :

$$\begin{cases} A_n & : \text{ le joueur } A \text{ a le ballon au } n^{ième} \text{ lancer.} \\ B_n & : \text{ le joueur } B \text{ a le ballon au } n^{ième} \text{ lancer.} \\ C_n & : \text{ le joueur } C \text{ a le ballon au } n^{ième} \text{ lancer.} \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$Y_{n+1} = M \times Y_n \qquad \text{avec} \qquad Y_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la limite de la suite (Y_n)

Suites et séries de fonctions

Exercices de référence

Exercice R17.

Déterminer si les propriétés suivantes sont conservées par CS, CUS ou par CU.

Propriété conservée par	CS	CUS	CU
1. Positivité			
2. Injectivité			
3. Surjectivité			
4. Continuité			
5. Dérivabilité			
6. Être bornée			
7. Être uniformément bornée (*)			
8. Être lipschitzienne			
9. Être λ-lipschitzienne			
10. Être une application linéaire			
11. Être un polynôme sur un segment			
12. Être un polynôme sur $\mathbb{R}$			

(*) bornée de manière uniforme signifie qu'il existe un M qui borne tous les f_n, c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq M$

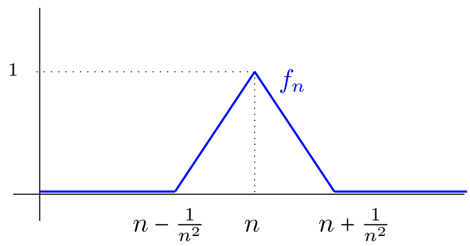
Exercice R18.

Étudier le mode de convergence des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$
3. $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -x + \frac{2}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}; +\infty[\end{cases}$
4. $f_n = xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice R19.

Considérons f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ définie par le graphe suivant :



1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement. On ne cherchera pas à exprimer sa limite f.
2. Montrer qu'il n'y a pas CU.
3. Montrer que f est intégrable et pourtant $f(x)$ ne tend pas ver 0 en $+\infty$.

Espaces préhilbertiens

Exercices de référence

Exercice R20.

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la définition d'un produit scalaire puis rappeler les deux formes du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Utiliser l'algorithme de Gramm-Schmidt pour transformer la famille (A, B, C) en une famille (A', B', C') orthonormale.
3. On note $F = \text{Vect}(A, B, C)$ et on admet que la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$
est dans F. Déterminer les coordonnées de M dans la base (A', B', C') de F
4. Déterminer enfin la matrice de la projection sur F dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Exercice R21.

Pour des polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note :

$$\langle P, Q \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente converge pour tous polynômes P et Q.
2. Montrer que $\langle , \rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}[X]$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons T_n le n$^{\text{e}}$polynôme de Tchebitchev, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice R22.

Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les espaces vectoriels formés respectivement par les matrices symétriques et par les matrices anti-symétriques de taille n.

1. Rappeler le théorème de projection dans un espace préhilbertien.
2. Montrer que $(A/B) = \text{tr}\left(A^T.B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note
$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \underset{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \|A - B\| \;=\; \underset{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \sqrt{(A - B/A - B)}$$
Justifier l'existence de $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
5. montrer que :
$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \left\| \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \right\|$$

Intégrales à paramètres.

Exercices de référence

Exercice R23.

Déterminer la limite des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \qquad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}dt$$

Exercice R24.

Soit f la fonction :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}dt$$

1. Quelle est le domaine de définition de F ?
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis calculer F'.
3. En déduire la valeur de $F(x)$.

Exercice R25.

En faisant apparaitre une série géométrique, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice R26.

La fonction gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est dérivable et calculer sa dérivée.

Endomorphismes particuliers d'un préhilbertien

Exercices de référence

Exercice R27.

Déterminer la nature des applications linéaires définies, dans une base orthonormale, par les matrices :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice R28.

Soit u un endomorphisme symétrique de E. Notons λ_{min} et λ_{max} la plus petite et la plus grande de ses valeurs propres. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lambda_{min}\|x\|^2 \leq (u(x)/x) \leq \lambda_{max}\|x\|^2$$

Exercice R29.

Soit A une matrice réelle de colonnes $C_1, \ldots, C_p$.

1. Montrer $A^T A$ a pour coefficients (m_{ij}) avec :

$$m_{ij} = \langle C_i, C_j \rangle = C_i^T . C_j$$

2. Montrer que $Ker(A^T A) = Ker(A)$. En déduire que $rg(A^T A) = rg(A)$.
3. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes réelles positives.

Exercice R30.

Soit S dans $S_n(\mathbb{R})$. Notons $\langle \, , \, \rangle$ le pse classique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que S est définie positive ssi $\phi(X,Y) = \langle X, SY \rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev mais c'est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Séries entières

Exercices de référence

Exercice R31.

Soit α dans $\mathbb{R}$ et a dans $\mathbb{R}^*$. Notons P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum n! z^n$
3. $\sum \frac{z^n}{n}$
4. $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$
5. $\sum \frac{z^n}{a^n}$
6. $\sum \frac{2^n z^n}{n!}$
7. $\sum \frac{n! z^n}{n^n}$
8. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$
9. $\sum 2^n z^{2n}$
10. $\sum \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) z^n$
11. $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} \right) z^n$
12. $\sum P(n) z^n$

Exercice R32.

Calculer les sommes des séries suivantes pour x dans $]-1;1[$:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} k x^k \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} k^2 x^k \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Exercice R33.

Considérons l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

pour x dans $\mathbb{R}_+^*$

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle développable en série entière.
2. Effectuer le changement de variable $t = \ln(x)$ dans l'équation homogène.
3. En déduire les solutions.

Exercice R34.

Montrer que toute fonction C^∞ vérifiant :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left| f^{(n)} \right| \leq M$$

est développable en série entière.

Variables aléatoires

Exercices de référence

Exercice R35.

On lance 2 dés à 6 faces et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant le résultat des ces dés.

1. Notons S la variable aléatoire donnant la somme des valeurs indiquées par les dés. Donner la loi de S, son espérance et son écart type.
2. Notons D la variable aléatoire donnant la différence des dés en valeur absolue. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
3. Notons M le maximum des deux dés. Exprimer la loi conjointe (X_1, M). En déduire la loi marginale M.
4. Si la somme fait 7 vous gagnez 4 euros, sinon vous perdez un euros. Est-ce un jeu financièrement intéressant ?

Exercice R36.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ. Montrer que :

$$P\Big(X \in]\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma[\Big) \geq \frac{3}{4}$$

Exercice R37.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(?, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par $(k \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ \ P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{k}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer k
2. Déterminer les lois de X et de Y
3. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer l'espérance et la variance de Y
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $P(X = Y)$.

Espaces vectoriels normés

Exercices de référence

Exercice R38.

Dans les 3 cas suivants, on prolonge la fonction en $(0,0)$ par 0. Déterminer si ces fonctions sont continues :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} \qquad f_2(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad f_3(x,y) = \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}$$

Exercice R39.

Dans cet exercice on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes. Soient $\|\_\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité associée. On pose pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$|||A||| \;=\; \sup_{x\in S} \|Ax\|$$

1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, posons $M = Max(\|Ae_1\|,\dots,\|Ae_n\|)$. Montrer que :
$$\forall X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ \ \|AX\| \le M(|x_1| + \dots + |x_n|)$$
2. En déduire que l'ensemble $\{\|AX\| \,/\, X \in S\}$ est majoré, puis que $|||A|||$ existe.
3. Montrer que $|||\_|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour tout X de $\mathbb{R}^n$: $\|AX\| \le |||A|||.\|X\|$
5. En déduire que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|||AB||| \le |||A|||.|||B|||$. Les normes vérifiant cette propriété sont appelés des normes matricielles ou des normes d'algèbre.
6. Notons B et $\overline{B}$ les boules unités respectivement ouverte et fermée. Montrer que :
$$|||A||| \;=\; \underset{x\in\overline{B}}{Sup}\|Ax\| \;=\; \underset{x\in B}{Sup}\|Ax\| \;=\; \underset{x\in E}{Sup}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Exercice R40.

Montrer que :

1. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est limite de matrices triangulaires supérieures avec des éléments distincts sur la diagonale.
2. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton. On admettra que si :
$$M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_{M_n}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_M(M)$$

Exercice R41.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall A,B \in E,\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \|AB\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall A,B \in E,\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \|AB\|_2 \le \|A\|_2\|B\|_2$.
3. Montrer que pour toute norme $\|\_\|$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe c dans $\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall A,B \in E,\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \|AB\| \le c\|A\|\|B\|$$

Calcul différentiel

Exercices de référence

Exercice R42.

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer, en fonction des dérivées partielles de f :

1. la dérivée de : $g_1(x) = f(x, x^2, x^4)$,
2. les dérivées partielles de : $g_2(x,y) = f(x+2y, 3x+4y, x^2+y^2)$.

Exercice R43.

Considérons l'ensemble C de $\mathbb{R}^2$ et f l'application de T dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1 \right\} \qquad f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$$

1. Dessiner l'ensemble C de $\mathbb{R}^2$
2. Sans calcul, justifier l'existence d'un maximum global de f.
3. Déterminer le maximum global de f.

Exercice R44.

Posons

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\left(\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)^3}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f n'est pas C^1 en $(0,0)$.

Exercice R45.

Déterminer les fonctions f de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, vérifiant :

$$y\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) - x\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = 0$$

On pourra dans un premier temps passer en coordonnées polaires.

Exercices de référence

Exercice R46.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z + e^t \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$$

Exercice R47.

Soit $xy' - 2y = 2$ une équation différentielle.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$
2. Peut-on "recoller" des solutions de $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ pour en faire des solutions sur $\mathbb{R}$?
3. Rappeler le théorème de Cauchy donnant la dimension de l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène. Quelle est la dimension ici de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène ?

Exercice R48.

Discuter des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 3y = e^{mx}$ suivant les valeurs de m.

Exercice R49.

1. Résoudre $ty'' = -y'$ et déterminer la dimension de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Pourquoi la dimension n'est pas 2 comme l'affirme le théorème de Cauchy-linéaire ?