Intégrales généralisées

Correction des exercices de références

Exercice R1 - Intégrales de Dirichlet. Soit α dans $\mathbb{R}$. Notons :

$$D_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1. Soit β dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout α de $\mathbb{R}$, l'intégrale D_α est de même nature que :

$$S_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha} dt$$

   On pourra remarquer (aucune preuve demandée) et utiliser qu'on a, dans chaque question, un résultat similaire en remplaçant *sin* par *cos*.
2. Si $\alpha > 1$, montrer que D_α est absolument convergente.
3. Si $\alpha \in]0,1]$, montrer que :
   — D_α est convergente.
   — D_α n'est pas absolument convergente. On pourra utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$.
4. Si $\alpha \leq 0$, montrer que D_α est divergente. On pourra montrer que la suite (a_n) ne tend pas vers 0 avec :

$$a_n = \int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

$\boxed{1}$ Dans $S_{\alpha,B}$, effectuons le changement de variable $x = \beta t$. On obtient :

$$S_{\alpha,\beta} = \int_\beta^{+\infty} \frac{\sin x}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \frac{dx}{\beta} = \beta^{\alpha-1} \int_\beta^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

Ainsi, $S_{\alpha,\beta}$ et D_α sont de même nature.

$\boxed{2}$ On a :

$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Comme les fonctions sont positives et que l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

converge car $\alpha > 1$, on peut déduire du théorème de comparaison que D_α est absolument convergente.

$\boxed{3a}$ Montrons que D_α est convergente à l'aide d'une IPPG. Soit

$$\begin{array}{ll} u(t) = \frac{1}{t^\alpha} & v(t) = -\cos(t) \\ u'(t) = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} & v'(t) = \sin(t), \end{array}$$

Les fonction u et v sont C^1 et le crochet :

$$\left[-\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty}$$

est convergent et vaut 0, ce qui justifie l'utilisation l'intégration par parties généralisée. On obtient ainsi :

$$D_\alpha = \left[-\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty} - \alpha\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt$$

Cette dernière intégrale étant convergente également d'après la question 1, on en déduire que D_α est convergent.

$\boxed{3b}$ Tout d'abord :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{t^\alpha}dt$$

La première intégrale est divergente et la seconde est convergente d'après les questions 1 et 3a. Ainsi l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}dt$$

est convergente. De plus :

$$\frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha}$$

et les fonctions sont positives. Ainsi d'après le théorème de comparaison, D_α n'est pas absolument convergente.

$\boxed{4}$ Par l'absurde, supposons que D_α converge. Comme :

$$\int_\pi^{n\pi+\pi}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

on en déduit que la série $\sum a_k$ converge et donc que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, pour tout n de $\mathbb{N}$, en posant $T = t - n\pi$, on a :

$$|a_n| = \left|\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt\right| = \left|(-1)^n\int_0^\pi\frac{\sin T}{(T+n\pi)^\alpha}dT\right| = \int_0^\pi\frac{\sin T}{(T+n\pi)^\alpha}dT$$

Enfin :

$$|a_n| \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}\int_0^\pi \sin T dT = \frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}$$

Or, la suite $\left(\frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0 ce qui est absurde. Donc D_α est divergente.

Exercice R2. Pour f et g dans $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, posons

$$(f/g) = \int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

1. Montrer que l'intégrale définissant $(\dots/\dots)$ converge.
2. Montrer que $(\dots/\dots)$ est un produit scalaire sur E.
3. Pourquoi $(\dots/\dots)$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.

$\boxed{1}$ La fonction $f\times g$ est continue sur le segment $[-1,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée. On a donc :

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall t\in[-1,1],\ |f(t)g(t)|\leq M.$$

Ainsi :

$$\forall t\in[-1,1],\ \left|\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}.$$

De plus, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}\frac{M}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[M\arcsin(t)\Big]_{-1}^{1} = \pi M$$

est convergente. Les fonctions étant positives, on peut appliquer le théorème de comparaison. L'intégrale définissant $(f|g)$ est donc convergente.

$\boxed{2}$ D'après la question 1, l'application $(\ldots|\ldots)$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est linéaire à gauche.
Soient f, g, h dans E et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g|h) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda f(t) \ + \ \mu g(t))h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} \frac{f(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \ + \ \mu \int_{-1}^{1} \frac{g(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \lambda(f|h) \ + \ \mu(g|h)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche.

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est symétrique.
Soient f, g dans E :

$$(f|g) \ = \ \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \ = \ \int_{-1}^{1} \frac{g(t)f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \ = \ (g|f)$$

Ainsi $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est bilinéaire.
C'est automatique car l'application est linéaire à gauche et symétrique.

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est positive.
Par positivité de l'intégrale, on a pour f dans E :

$$\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0 \implies \int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0 \implies (f|f) \geq 0$$

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est définie positive. Soit f dans E :

$$(f|f) = 0 \implies \int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive et **continue** donc :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \implies \forall t \in]-1,1[, \quad f(t) = 0$$

Par continuité, on a $f = 0$.

$\boxed{3}$ L'application $(\cdot|\cdot)$ n'est pas définie positive sur $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$. En effet, en prenant l'application f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $f \neq 0$ et $(f|f) = 0$.

Exercice R3 - Calcul de l'intégrale de Gauss. L'intégrale de Gauss est définie par :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

1. Montrer la convergence de I.
2. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que pour tous n de $\mathbb{N}^*$ et t de $[0, \sqrt{n}[$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

3. Posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \quad \leq \quad \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \quad \leq \quad \sqrt{n}W_{2n-2}$$

4. On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

$\boxed{1}$ L'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$. Comme $t^2 e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, on a :

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \quad \text{converge.}$$

D'après le théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale I est convergente en $+\infty$. Par parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, le raisonnement est identique en $-\infty$.

$\boxed{2}$ La fonction $\ln(1+x)$ est concave. Elle est donc en dessous de ses tangentes ; en particulier, sa tangente en 0. On obtient :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) && \leq -\frac{t^2}{n} \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} && \leq e^{-t^2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n && \leq e^{-t^2}
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) && \leq \frac{t^2}{n} \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} && \leq e^{t^2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n && \leq e^{t^2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} && \geq e^{-t^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(x)$, (donc $dt = \sqrt{n}\cos(x)\,dx$) on obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}W_{2n+1} &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x))^n \cos(x)\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \\
&\leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \quad \text{(d'après Q2)}
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(x)$ (donc $dt = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}W_{2n-2} &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\frac{dx}{\cos^2(x)} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \\
&\geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \\
&\geq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \quad \text{(d'après Q2)}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Avec l'équivalent de W_n donné dans l'énonce, on a :

$$\begin{cases}
\sqrt{n}\,w_{2n+1} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{n\cdot\frac{\pi}{2(2n+1)}} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{\frac{n\pi}{4n}} & = & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\sqrt{n}\,w_{2n-2} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{n\cdot\frac{\pi}{2(2n-2)}} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{\frac{n\pi}{4n}} & = & \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{cases}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,w_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,w_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En utilisant l'inégalité de la question 3 et le théorème d'encadrement, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, on conclut :

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Correction des exercices de références

Exercice R4. Soient λ_0, ..., λ_n dans $\mathbb{C}$. Posons

$$V(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \qquad VP(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1+\lambda_0 & 1+\lambda_0^2 & \dots & 1+\lambda_0^n \\ 2 & 1+\lambda_1 & 1+\lambda_1^2 & \dots & 1+\lambda_1^n \\ 2 & 1+\lambda_2 & 1+\lambda_2^2 & \dots & 1+\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 1+\lambda_n & 1+\lambda_n^2 & \dots & 1+\lambda_n^n \end{vmatrix}$$

1. Montrer que :
$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)$$
En déduire que $V(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq 0$ si et seulement si les $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont distincts.
2. Montrer que :
$$VP(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = 2.V(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

$\boxed{1}$ Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n=0$, le résultat est trivial en se rappelant qu'un produit de 0 élément vaut 1. Supposons le résultat acquis pour n fixé dans $\mathbb{N}$ et montrons-le pour $n+1$. Posons $f(x) = V(\lambda_0,\dots,\lambda_n,x)$. En développant ce déterminant suivant la dernière ligne, on s'aperçoit que f est un polynôme de degré $n+1$ dont le terme dominant est $V(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$. De plus

$$f(\lambda_0) = f(\lambda_1) = \dots = f(\lambda_n) = 0$$

car on obtient 2 lignes identiques dans le déterminant. Les racines de f sont donc en évidence et la forme factorisée de f est :

$$f(x) = V(\lambda_0,\dots,\lambda_n).\prod_{i=0}^{n}(x-\lambda_i)$$

Il suffit d'utiliser l'hypothèse de récurrence et on obtient :

$$V(\lambda_0,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1}) = f(\lambda_{n+1}) = \prod_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\prod_{i=0}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_i) = \prod_{0\le i<j\le n+1}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$\boxed{2}$ Posons :

$$g(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x+\lambda_0 & x+\lambda_0^2 & \dots & x+\lambda_0^n \\ x+1 & x+\lambda_1 & x+\lambda_1^2 & \dots & x+\lambda_1^n \\ x+1 & x+\lambda_2 & x+\lambda_2^2 & \dots & x+\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+1 & x+\lambda_n & x+\lambda_n^2 & \dots & x+\lambda_n^n \end{vmatrix}$$

On soustrait ensuite la ligne 1 aux lignes de 2 à $n+1$. On obtient :

$$g(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x+\lambda_0 & x+\lambda_0^2 & \dots & x+\lambda_0^n \\ 0 & \lambda_1-\lambda_0 & \lambda_1^2-\lambda_0^2 & \dots & \lambda_1^n-\lambda_0^n \\ 0 & \lambda_2-\lambda_0 & \lambda_2^2-\lambda_0^2 & \dots & \lambda_2^n-\lambda_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_n-\lambda_0 & \lambda_n^2-\lambda_0^2 & \dots & \lambda_n^n-\lambda_0^n \end{vmatrix}$$

Puis en développant suivant la ligne 1, on s'aperçoit que g est un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$. Il existe donc a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $g(x) = ax+b$. De plus :

$$\begin{cases} g(0) & = & b & = & V(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \\ g(-1) & = & b-a & = & 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$VP(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \ = \ g(1) \ = \ a+b \ = \ 2.V(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$$

Exercice R5. On définit la suite des polynômes de Tchebychev (T_n) par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^, \ T_{n+1} \ = \ 2XT_n - T_{n-1}$$

1. Montrer que :
$$\forall n\mathbb{N}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ cos(n\theta) = T_n(cos\theta) \qquad (*)$$
2. Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant la relation $(*)$.
3. Calculer T_5 avec la relation de récurrence, puis avec la relation $(*)$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n,
5. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n scindé et à racines simples.
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} si $n \geq 1$. En déduire la forme factorisée de T_n.

$\boxed{1}$ Montrons par récurrence double que pour tout n de $\mathbb{N}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Les résultats sont évidents pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que le résultat soit vrai pour $n-1$ et n avec n fixé dans $\mathbb{N}^*$. A partir de l'équation de récurrence, puis en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(t)) &= 2\cos(t)T_n(\cos(t)) \ - \ T_{n-1}(\cos(t)) \\ &= 2\cos(t)\cos(nt) \ - \ \cos((n-1)t) \end{aligned}$$

Puis on utilise la formule trigonométrique obtenue par somme de cosinus :

$$\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \ = \ 2\cos(t)\cos(nt)$$

Ainsi $T_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$ et le résultat est démontré par récurrence.

$\boxed{2}$ Supposons qu'il existe T_n et Q_n vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ T_n(\cos(t)) \ = \ Q_n(\cos(t)) \ = \ \cos(nt)$$

Puis par soustraction et en posant $x = \cos(t)$, on obtient :

$$\forall x \in [-1,1], \ (T_n - Q_n)x = 0$$

Ainsi le polynôme $T_n - Q_n$ est nul sur $[-1;1]$. Il a ainsi une infinité de racines. Il est donc nul.

$\boxed{3.a.}$ Déterminons T_5 à l'aide de la relation $*$ en développant $\cos(5x)$:

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= Re\left(e^{5ix}\right) \\ &= Re\left(\left(e^{ix}\right)^5\right) \\ &= Re\left((\cos(x) + i\sin(x))^5\right) \\ &= Re\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cos^{5-k}(x)i^k\sin^k(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cos^{5-k}(x)\sin^k(x)Re\left(i^k\right) \end{aligned}$$

Or $Re(i^k) = 0$ si k est impair et $Re(i^k) = i^k$ si k est pair. Ainsi la somme devient :

$$\begin{array}{rcccccc} \cos(5x) & = & \binom{5}{0}\cos^5(x) & + & \binom{5}{2}\cos^3(x)i^2\sin^2(x) & + & \binom{5}{4}\cos(x)i^4\sin^4(x) \\ & = & \cos^5(x) & - & 10\cos^3(x)(1-\cos^2(x)) & + & 5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2 \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} T_5 & = & X^5 - 10X^3(1-X^2) + 5X(1-X^2)^2 \\ & = & X^5 - 10X^3 + 10X^5 + 5X - 10X^3 + 5X^5) \\ & = & 16X^5 - 20X^3 + 5X \end{array}$$

$\boxed{\text{3.b.}}$ Calculons T_5 avec l'équation de récurrence. Il faut donc calculer T_2, T_3, T_4 avant.

$$\begin{array}{rcl} T_2 & = & 2XT_1 - T_0 \\ & = & 2X^2 - 1 \\ T_3 & = & 2XT_2 - T_1 \\ & = & 2X(2X^2-1) - X \\ & = & 4X^3 - 2X - X \\ & = & 4X^3 - 3X \\ T_4 & = & 2XT_3 - T_2 \\ & = & 2X(4X^3-3X) - (2X^2-1) \\ & = & 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1 \\ & = & 8X^4 - 8X^2 + 1 \\ T_5 & = & 2XT_4 - T_3 \\ & = & 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X) \\ & = & 16X^5 - 16X^3 + 2X - 4X^3 + 3X \\ & = & 16X^5 - 20X^3 + 5X \end{array}$$

$\boxed{4}$ Par récurrence double, montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, le degré de T_n est n. Comme

$$\left\{\begin{array}{rcccl} deg(P_0) & = & deg(1) & = & 0 \\ deg(P_1) & = & deg(X) & = & 1 \end{array}\right.$$

le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour n et $n+1$, avec n fixé dans $\mathbb{N}$, et montrons-le au rang $n+2$. Comme

$$deg(2XP_{n+1}) = 1 + (n+1) > n = deg(P_n)$$

on a :

$$deg(P_{n+2}) = deg(XP_{n+1} + P_n) = Max(deg(XP_{n+1}), deg(P_n)) = Max(n+2, n) = n+2$$

Ainsi $deg(P_n) = n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\boxed{5}$ Montrons à présent que T_n est scindé à racines simples. Résolvons $T_n(\cos(x)) = 0$:

$$T_n(\cos(x)) = 0 \iff \cos(nx) = 0 \iff nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Les valeurs

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \qquad \text{avec } k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

sont des racines de T_n toutes différentes car la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0;\pi]$. On a donc trouvé n racines distincts de T_n qui est de degré n, on a toutes les racines et ces racines sont simples.

$\boxed{6}$ Montrons le résultat par récurrence simple. Le coefficient dominant de $P_1 = X$ est $1 = 2^{1-1}$; le résultat est donc vrai pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour n, avec n fixé dans $\mathbb{N}^*$, et montrons-le au rang $n+1$. Comme

$$deg(2XP_{n+1}) > deg(P_n)$$

le coefficient dominant de $2XP_{n+1} + P_n$ est celui $2XP_{n+1}$ soit encore $2.2^{(n+1)-1} = 2^{n+1}$. Le résultat est donc vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{Compléments.}}$

$\boxed{\text{C1}}$ Il est possible d'avoir une forme explicite de T_n en s'inspirant de la question 3.a. :

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= Re\left(e^{inx}\right)\\
&= Re\left(\left(e^{ix}\right)^n\right)\\
&= Re\left((\cos(x)+i\sin(x))^n\right)\\
&= Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x)i^k\sin^k(x)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x)\sin^k(x)Re\left(i^k\right)
\end{aligned}$$

Or $Re(i^k)=0$ si k est impair et $Re(i^k)=i^k$ si k est pair. Ainsi la somme devient :

$$\cos(nx) = \sum_{k=0 k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x)i^k\sin^k(x)$$

En posant $K=2k$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2K}\cos^{n-2K}(x)(-1)^K\sin^{2K}(x)\\
&= \sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^K\binom{n}{2K}\cos^{n-2K}(x)(1-\cos^2(x))^K
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$T_n = \sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^K\binom{n}{2K}X^{n-2K}(1-X^2)^K$$

Exercice R6. Soient n dans $\mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts.

1. Pour tout i dans $\{0,\dots,n\}$, il existe un unique polynôme L_i de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $L_i(a_j)=\delta_{ij}$ pour tout j de $\{0,\dots,n\}$. Ce polynôme vaut :
$$L_i = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$
2. La famille $(L_0,\dots,L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont :
$$(P(a_0),P(a_1),\dots,P(a_n))$$
En d'autres termes, on a :
$$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + \dots + P(a_n)L_n$$
4. En particulier, on a : $L_0+L_1+\dots+L_n = 1$

$\boxed{1}$ Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse.**
Supposons qu'il existe un polynôme L_i vérifiant les hypothèses. Les réels a_j pour $j\neq i$ sont racines de L_i. On a donc :
$$\exists Q\in\mathbb{R}[X],\quad L_i = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(X-a_j)\cdot Q$$
Comme le polynôme L_i est de degré n maximum, Q est constant. Pour trouver cette constante, on évalue en a_i. On obtient :
$$Q = \frac{L_i(a_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)}$$

On obtient donc :

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

• **Synthèse.**
Le polynôme L_i trouvé vérifie bien les hypothèses.

• **Conclusion**
Il existe un polynôme unique L_i vérifiant :

$$\begin{cases} L_i \in \mathbb{R}_n[X] \\ \forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(a_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$$

On évalue en a_i pour i dans $[\![0, n]\!]$, on obtient :

$$0 + \cdots + 0 + \lambda_i L_i(a_i) + 0 + \cdots + 0 = 0$$

Donc pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on a $\lambda_i = 0$, la famille est donc libre. De plus, elle comporte $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

$\boxed{3}$ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Comme $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, d'après la question 2, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$$

On évalue ensuite en a_i avec i dans $[\![0, n]\!]$, on obtient $P(a_i) = \lambda_i$. Ainsi :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

$\boxed{4}$ Comme pour tout P de $\mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = P(a_0) L_0 + \cdots + P(a_n) L_n$$

En prenant $P = 1$, on obtient :

$$1 = L_0 + \cdots + L_n$$

Exercice R7. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}} \qquad \sum \frac{1}{n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} \qquad \sum \frac{1}{n^{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)}} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$$

$\boxed{1}$ Déterminons la limite du terme général :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}} &= \frac{e^{n\ln(\ln(n))}}{e^{\ln^2(n)}} \\
&= e^{n\ln(\ln(n))-\ln^2(n)} \\
&= e^{n\left(\ln(\ln(n))-\frac{\ln^2(n)}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{par croissances comparées}
\end{aligned}$$

Ainsi la série

$$\sum \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}}$$

est grossièrement divergente.

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a grâce à la croissance de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 &\implies \ln(n)\cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq \ln(n) \\
&\implies e^{\ln(n)\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \leq e^{\ln(n)} \\
&\implies n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \leq n \\
&\implies \frac{1}{n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} \geq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge et les séries sont à termes positifs, la série

$$\sum \frac{1}{n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

est donc divergente d'après le théorème de comparaison.

$\boxed{3}$ Effectuons un développement limité :

$$\frac{1}{n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{e^{\ln(n)\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \frac{1}{ne^{o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

La dernière équivalence étant obtenue grâce au théorème des croissances comparées. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge et les séries sont à termes positifs. D'après le théorème de comparaison, on peut conclure que la série

$$\sum \frac{1}{n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

est divergente.

$\boxed{4}$ Posons $u_n = \frac{1}{n^2+(-1)^n}$. On a alors pour $n \geq 1$:

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{1}{(n+1)^2+(-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{n^2+(-1)^n} \\ & \leq & \dfrac{1}{(n+1)^2-1} - \dfrac{1}{n^2+1} \\ & \leq & \dfrac{n^2+1-(n^2+2n+1-1)}{((n+1)^2-1)(n^2+1)} \\ & \leq & \dfrac{-2n+1}{((n+1)^2-1)(n^2+1)} \\ & \leq & 0 \end{array}$$

La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers 0. La série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$$

est donc une série alternée. Elle est convergente.

Exercice R8. Posons :

$$H_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{n} \qquad\qquad U_n = H_n - \ln(n) \qquad\qquad V_n = H_n - \ln(n+1)$$

Version A.

1. Montrer que : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $U_{n-1} - U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$
3. En déduire que (U_n) est convergente. Sa limite est notée γ, c'est la constante d'Euler.

Version B.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer la monotonie de (U_n) et (V_n).
2. En déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite. Leur limite est notée γ, c'est la constante d'Euler.
3. Montrer que $|U_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.
4. Écrire un programme Python permettant de calculer γ avec la précision souhaitée.

$\boxed{\text{A.1}}$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$$

En sommant pour k variant de 1 à $n-1$ (avec n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$) :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Soit :

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$$

Ce qui donne :

$$1 - \frac{1}{H_n} \leq \frac{\ln(n)}{H_n} \leq 1 - \frac{1}{nH_n}$$

Or $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{H_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{nH_n}\right) = 1$$

Par théorème d'encadrement, on obtient :

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

$\boxed{\text{A.2}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} U_{n-1} - U_n &= H_{n-1} - \ln(n) - H_n + \ln(n) \\ &= -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{A.3}}$ Puisque :

$$U_{n-1} - U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2n^2} \text{converge}$$

nous pouvons utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs. La série $\sum(U_{n-1} - U_n)$ est donc convergente et par télescopage, (U_n) est convergente.

$\boxed{\text{B.1}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - U_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \quad (1)$$

Or la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, n+1]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe c dans $]n, n+1[$ tel que :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c}((n+1) - n) = \frac{1}{c}$$

En réinjectant dans l'équation (1), on trouve :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c} \leq 0$$

La suite (U_n) est donc décroissante.

$\boxed{\text{B.2}}$ On raisonne de la même manière pour la suite (V_n). Pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$V_{n+1} - V_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1)$$

Grâce au théorème des accroissements finis, il existe c dans $]n+1, n+2[$ tel que :

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) = \frac{1}{c}((n+2) - (n+1)) = \frac{1}{c}$$

Ainsi :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c} \geq 0$$

La suite (V_n) est donc croissante. De plus :

$$V_n - U_n = H_n - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Les suites (U_n) et (V_n) sont donc adjacentes. Ainsi, elles convergent vers la même limite.

$\boxed{\text{B.3}}$ Soit n dans $\mathbb{N}$. Comme (U_n) est décroissante, (V_n) est croissante et les deux suites tendent vers γ, on a :

$$V_n \leq \gamma \leq U_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |U_n - \gamma| &\leq |U_n - V_n| \\ &\leq |H_n - \ln(n) - H_n + \ln(n+1)| \\ &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B.4}}$ Voici un programme permettant de calculer la constante d'Euler :

```
def Euler(Precision) :
    n = 1
    H = 1
    while (1/n > Precision) :
        n = n + 1
        H = H + 1/n
    return (H - ln(n))
```

Exercice R9. On rappelle quelques informations sur l'intégrale de Wallis :

$$I_{2n} \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \quad = \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad \sim \quad \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

De plus, posons :

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - u_{n+1}$$

1. Montrer que $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$
2. En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que (u_n) est convergente.
4. Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = e^{u_n}$. Montrer que

$$\frac{\sqrt{2}w_{2n}}{w_n^2} \quad = \quad \sqrt{n}\frac{2}{\pi}I_{2n}$$

5. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= u_n - u_{n+1}\\
&= \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \times \frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \times \frac{(n+1)^{n}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{1}\right)\\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{e}\right)\\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) - \ln(e)\\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) - 1\\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Déterminons un équivalent de v_n :

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\\
&= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}-1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Utilisons le théorème de comparaison des séries à termes positifs. On a :

$$u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

et $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge par Riemann. Les séries étant positives, on peut en conclure que $\sum u_n - u_{n+1}$ est convergente et donc, par télescopage, (u_n) est convergente.

$\boxed{4}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}\,w_{2n}}{w_n^2} &= \sqrt{2}\cdot\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}\cdot\frac{n^{2n}e^{-2n}\cdot n}{(n!)^2}\\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}\cdot\sqrt{n}\\
&= \frac{2}{\pi}I_{2n}\sqrt{n}
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ On sait d'après la question 3 que la suite (u_n) est convergente, donc $w_n = e^{u_n}$ admet une limite ℓ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $w_n \sim \ell$ et :

$$\frac{\sqrt{2}\,w_{2n}}{w_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\,\ell}{\ell^2} = \frac{\sqrt{2}}{\ell}$$

De plus :

$$\frac{\sqrt{2}\,w_{2n}}{w_n^2} = \sqrt{n}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Enfin, par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\frac{\sqrt{2}}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \implies \ell = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi $w_n \sim \ell = \sqrt{2\pi}$, donc

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Réduction des endomorphismes

Correction des exercices de références

Exercice R10. Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$
2. Déterminer un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.
3. En déduire A^n.

$\boxed{1}$ Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & 1 \\ -2 & X-4 & -2 \\ 1 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$$

En développant suivant la colonne 2, on obtient :

$$\chi_A = (X-4)\begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-4)\left[(X-3)^2-1\right] = (X-4)^2(X-2)$$

Déterminons les espaces propres :

$$E_4 = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_2 = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité des valeurs propres est égale à la dimension de l'espace propre associé. La matrice A est donc diagonalisable.
Ainsi on a $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ D'après la seconde condition de diagonalisation, A est diagonalisable si et seulement si le polynôme spectral est annulateur.
Ainsi :

$$P_S = (X-2)(X-4)$$

est annulateur de A.

$\boxed{3}$ On effectue la division euclidienne de X^n par P_S. Comme P_S est de degré 2, il existe a, b dans $\mathbb{R}$ et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$X^n = P_S \cdot Q + aX + b \qquad (*)$$

En évaluant en 2 et 4, on trouve :

$$\begin{cases} 2^n &= 2a+b & (1) \\ 4^n &= 4a+b & (2) \end{cases}$$

Soustrayons (2) à (1) :

$$\begin{cases} 2^n &= 2a+b \\ 4^n-2^n &= 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{2}(4^n-2^n) &= 2\cdot 4^{n-1}-2^{n-1} \\ b &= 2^n-2a &= 2^n+2^n-4^n &= 2^{n+1}-4^n \end{cases}$$

Enfin, en remplaçant X par A dans l'équation $(*)$, on trouve :

$$A^n = \left(2\cdot 4^{n-1}-2^{n-1}\right)A + \left(2^{n+1}-4^n\right)I$$

Exercice R11. Soit A dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible telle que $A^3-3A^2+2A=0$ et $Tr(A)=8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer la liste des vp de A ainsi que leur multiplicité. En déduire une matrice D diagonale semblable à A.
3. Donner tous les polynômes annulateurs de A.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I.

$\boxed{1}$ D'après l'énoncé, le polynôme

$$P = X^3-3X^2+2X = X(X^2-3X+2) = X(X-1)(X-2)$$

est un polynôme annulateur de A. Ainsi il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable.

$\boxed{2}$ Le polynôme $P = X(X-1)(X-2)$ étant annulateur, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Rac}(P) = \{0,1,2\}$$

De plus, A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre. On a donc :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,2\}$$

Notons μ_1 et μ_2 les multiplicités (éventuellement nulles) des valeurs propres 1 et 2. On a alors :

$$\begin{cases} 8 &= 1\cdot\mu_1+2\cdot\mu_2 &= \mathrm{tr}(A) \\ 6 &= \mu_1+\mu_2 &= \text{taille de } A \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_1 = 4 \\ \mu_2 = 2 \end{cases}$$

Ainsi 1 et 2 sont les valeurs propres de A de multiplicité respective 4 et 2.

$\boxed{3}$ D'après la question 1, le polynôme $P=(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi tout multiple de P est encore annulateur.
Inversement, montrons que si Q est un polynôme annulateur de A, alors c'est un multiple de P. Effectuons la division euclidienne de Q par P, on obtient :

$$Q = P\cdot Q_0 + aX+b$$

En évaluant en A, on trouve $aA+bI=0$. Si $(a,b)\neq(0,0)$, alors A admet un polynôme de degré 1 annulateur, ainsi A a une unique valeur propre. Absurde. Donc $(a,b)=(0,0)$ et Q est un multiple de P.

Ainsi les polynômes annulateurs de A sont exactement les multiples du polynôme spectral. Le résultat reste vrai pour toute matrice diagonalisable avec une démonstration similaire.

$\boxed{4}$ Pour déterminer A^n, on effectue la division euclidienne de X^n par P. On obtient, puisque P est de degré 2 :

$$X^n = PQ + aX + b$$

avec Q dans $\mathbb{R}[X]$ et (a,b) dans $\mathbb{R}^2$. En évaluant en 1 et 2, on trouve :

$$\begin{cases} 1 = a+b \\ 2^n = 2a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Enfin, en évaluant en A, on trouve :

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$

C'est-à-dire :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 3 \cdot 2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

Exercice R12. Considérons la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer A telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire u_n en fonction de n.

$\boxed{1}$ Déterminons une relation de récurrence sur les X_n :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n$$

$\boxed{2}$ Déterminons le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -6 & 11 & x-6 \end{vmatrix}$$

On peut reconnaître une matrice compagnon ou calculer naïvement le déterminant. Choisissons la deuxième solution en effectuant l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 + C_1 + C_2$.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & x-1 \\ 0 & x & x-1 \\ -6 & 11 & x-1 \end{vmatrix}$$

Puis avec les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & x-1 \\ -x & x+1 & 0 \\ -6-x & 12 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe suivant la dernière colonne :

$$\chi_A(x) = (x-1) \begin{vmatrix} -x & x+1 \\ -6-x & 12 \end{vmatrix} = (x-1)\big[-12x + (6+x)(x+1)\big]$$

Enfin :

$$\chi_A(x) \quad = \quad (x-1)\left(-12x+6x+x+x^2+x\right) \quad = \quad (x-1)\left(x^2-5x+6\right) \quad = \quad (x-1)(x-2)(x-3)$$

La matrice A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples. Déterminons à présent les espaces propres.

$$E_1 \quad = \quad \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 11 & -5 \end{pmatrix} \quad = \quad \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \quad = \quad \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -6 & 11 & -4 \end{pmatrix} \quad = \quad \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \quad = \quad \ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -6 & 11 & -3 \end{pmatrix} \quad = \quad \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Par récurrence immédiate, on trouve :

$$X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$$

Or :

$$P^{-1}X_0 \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$D^nP^{-1}X_0 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3\times 2^n \\ -3^n \end{pmatrix}$$

Enfin en regardant la première coordonnée de $P(D^nP^{-1}X_0)$, on trouve la valeur de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \quad = \quad -2 \; + \; 3\times 2^n \; - \; 3^n$$

Exercice R13. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples.

$\boxed{1}$ Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & b & \cdots & -b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ -b & \cdots & b & x-a \end{vmatrix}$$

En sommant toutes les lignes sur la dernière et en factorisant :

$$\chi_A(x) = (X-a-(n-1)b)\begin{vmatrix} x-a & -b & \cdots & \cdots & -b \\ -b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -b & \dots & -b & x-a & -b \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, en additionnant b fois la dernière ligne aux autres lignes :

$$\chi_A(x) = (X-(a+(n-1)b))\begin{vmatrix} x-a+b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & x-a+b \end{vmatrix}$$

Enfin :

$$\chi_A(X) = \big(X-(a+(n-1)b)\big)\big(X-(a-b)\big)^{n-1}$$

$\boxed{2}$ Déterminons les espaces propres :

$$E_{a+(n-1)b} = \ker\begin{pmatrix} (a-(n-1)b) & b & \cdots & b \\ b & (a-(n-1)b) & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & (a-(n-1)b) \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc

$$\dim\left(E_{a+(n-1)b}\right) = 1 = \mathrm{mult}(a+(n-1)b)$$

$$E_{a-b} = \ker\begin{pmatrix} -b & \cdots & -b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & \cdots & -b \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc

$$\dim(E_{a-b}) = n-1 = \mathrm{mult}(a-b)$$

Comme le polynôme caractéristique est de plus scindé, d'après la première condition de diagonalisation, A est diagonalisable.

$\boxed{3}$ A est diagonalisable donc le polynôme spectral qui est scindé à racines simples est annulateur de A, c'est-à-dire :

$$P_s(x) = (x-a-b)(x-a-(n-1)b)$$

est annulateur de A.

Probabilité

Correction des exercices de références

Exercice R14. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face. Montrer que l'événement A="le jeu s'arrête" est presque sûr. Pourtant cela ne signifie pas que le jeu se finisse.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} F_n & : & \text{"On fait face au n}^{\text{ième}}\text{ lancer"} \\ G_n & : & \text{"On fait pile lors des } n \text{ premiers lancers"} \end{array}$$

La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
D'après le théorème de continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) \qquad (1)$$

De plus, comme pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$G_n \;=\; \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_n}$$

et que les lancers sont indépendants, on obtient :

$$\mathbb{P}(G_n) \;=\; \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}(\overline{F_2})\cdots\mathbb{P}(\overline{F_n}) \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (2)$$

En combinant les résultats (1) et (2), on obtient :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \;=\; 0$$

Et donc :

$$\mathbb{P}(A) = 1$$

Exercice R15. On dispose de 2 dés à 6 faces, un parfaitement équilibré et un faisant 6 systématiquement. On choisit un dé au hasard, puis on le lance.

1. Quelle est la probabilité de faire 6 ?
2. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé sachant que l'on a fait 6 ?

$\boxed{1}$ Notons les événements :

$$\begin{array}{lcl} E & : & \text{"le dé choisi est le dé équilibré"} \\ S & : & \text{"on a fait six au dé"} \end{array}$$

Le système $(E, \overline{E})$ est une SCE. On peut appliquer la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(S) & = & \mathbb{P}(S|E)\,\mathbb{P}(E) \;+\; \mathbb{P}(S|\overline{E})\,\mathbb{P}(\overline{E}) \\ & = & \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \;+\; 1 \times \frac{1}{2} \\ & = & \frac{7}{12} \end{array}$$

$\boxed{2}$ Il suffit d'appliquer la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(\overline{E}|S) = \frac{\mathbb{P}(S|\overline{E})\,\mathbb{P}(\overline{E})}{\mathbb{P}(S)} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$$

Exercice R16. Trois joueurs A, B et C jouent au ballon :

— Le joueur A passe le ballon à B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

— Le joueur B passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

— Le joueur C passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

Considérons les événements suivant :

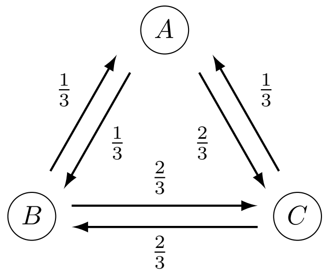
$$\begin{cases} A_n & : \text{ le joueur } A \text{ a le ballon au } n^{i\grave{e}me} \text{ lancer.} \\ B_n & : \text{ le joueur } B \text{ a le ballon au } n^{i\grave{e}me} \text{ lancer.} \\ C_n & : \text{ le joueur } C \text{ a le ballon au } n^{i\grave{e}me} \text{ lancer.} \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$Y_{n+1} = M \times Y_n \qquad \text{avec} \qquad Y_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la limite de la suite (Y_n)

$\boxed{1}$ Représentons la situation suivante par un schéma de Markov :



Soit n dans $\mathbb{N}$. Le système (A_n, B_n, C_n) est un S.C.D.E. On peut appliquer le théorème des probabilités totales. On obtient :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\,\mathbb{P}(C_n)$$

Et donc :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(C_n)$$

De même :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(C_n)$$

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(B_n)$$

On obtient en mettant ces équations sous forme matricielle :

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} Y_n$$

Il suffit de poser :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Par récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = M^n Y_0$$

Pour diagonaliser M :

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & x \end{vmatrix}$$

En additionnant toutes les lignes sur la dernière :

$$\chi_M(x) = (x-1) \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Après les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3} L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3} L_3$:

$$\chi_M(x) = (x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Déterminons les espaces propres :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker(I - M) &&= \ker \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} &&= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\
E_{-\frac{1}{3}} &= \ker\left(-\tfrac{1}{3} I - M\right) &&= \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} &&= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
E_{-\frac{2}{3}} &= \ker\left(-\tfrac{2}{3} I - M\right) &&= \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} &&= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc $M = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$\lim_{n \to +\infty} M^n = \lim_{n \to +\infty} P D^n P^{-1}$$

Comme D^n tend vers une matrice élémentaire E_{11} :

$$\lim_{n \to +\infty} M^n = \lim_{n \to +\infty} P D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et, après calcul de P^{-1}, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 7 & 0 & 0\\ 8 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 15 & -5 & -5\\ 8 & 8 & -12\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 7 & 7 & 7\\ 8 & 8 & 8\end{pmatrix}$$

Comme $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$ pour tout n, on a finalement :

$$Y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}\frac{5}{20}\\ \frac{7}{20}\\ \frac{8}{20}\end{pmatrix}$$

Exercice R17. Déterminer si les propriétés suivantes sont conservées par CS, CUS ou par CU.

	Propriété conservée par	CS	CUS	CU
1.	Positivité			
2.	Injectivité			
3.	Surjectivité			
4.	Continuité			
5.	Dérivabilité			
6.	Être bornée			
7.	Être uniformément bornée (*)			
8.	Être lipschitzienne			
9.	Être λ-lipschitzienne			
10.	Être une application linéaire			
11.	Être un polynôme sur un segment			
12.	Être un polynôme sur $\mathbb{R}$			

(*) bornée de manière uniforme signifie qu'il existe un M qui borne tous les f_n, c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq M$

	Propriété conservée par	CS	CUS	CU
1.	Positivité	Oui	Oui	Oui
2.	Injectivité	Non	Non	Non
3.	Surjectivité	Non	Non	Non
4.	Continuité	Non	Oui	Oui
5.	Dérivabilité	Non	Non	Non
6.	Être bornée	Non	Non	Oui
7.	Être bornée de manière uniforme*	Oui	Oui	Oui
8.	Être lipschitzienne	Non	Non	Non
9.	Être λ-lipschitzienne	Oui	Oui	Oui
10.	Être une application linéaire	Oui	Oui	Oui
11.	Être un polynôme sur un segment	Non	Non	Non
12.	Être un polynôme sur $\mathbb{R}$	Non	Non	Oui

Exercice R18. Étudier le mode de convergence des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = x^n \quad \text{sur } [0,1]$

2. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+$

3. $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -x + \frac{2}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}; +\infty[\end{cases}$

4. $f_n = xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$

$\boxed{1}$ Soit x dans $[0,1]$, on a :

$$f_n(x) \;=\; x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \underset{\text{def}}{=} f(x)$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers f. Montrons que (f_n) ne converge pas uniformément. Pour cela, posons $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on a alors :

$$f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

Donc :

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

et la convergence n'est pas uniforme. On aurait pu voir également que les f_n sont continues et que f ne l'est pas. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme car la convergence uniforme conserve la continuité.
Comme on est sur un segment, il n'y a pas non plus de convergence uniforme sur tout segment de $[0,1]$.

$\boxed{2}$ Soit x dans $\mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) \;=\; \frac{x}{x+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrons qu'il n'y pas convergence uniforme. Pour cela, on considère la suite $x_n = n$, on a alors :

$$f_n(x_n) \;=\; \frac{n}{n+n} \;=\; \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. Montrons par contre qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^+$. Soit $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+$,

$$|f_n(x)| \;=\; \left|\frac{x}{x+n}\right| \;\leq\; \frac{b}{n}$$

On passe au sup sur $[a,b]$, on a alors :

$$\|f_n - 0\|_\infty^{[a,b]} \;\leq\; \frac{b}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il y a donc convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{3}$ Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Si x est dans $\mathbb{R}_+^*$, alors à partir d'un certain rang, on aura $\frac{2}{n} \leq x$ et donc $f_n(x) = 0$. Ainsi :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Pour la convergence uniforme, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

On passe au sup pour x dans $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\|f_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. Et donc (f_n) converge uniformément également vers 0 sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{4}$ Pour x dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$f_n(x) = xe^{-nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

même si $x = 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Pour montrer la convergence uniforme, on étudie la fonction f_n :

$$f_n'(x) = e^{-nx^2}\left(1 - nx^2\right).$$

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit que

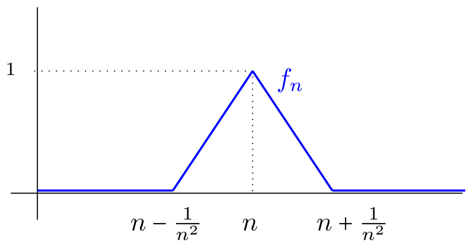
$$|f_n(x) - 0| \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-1}.$$

En passant au sup pour x dans $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\|f_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc convergence uniforme et convergence uniforme sur tout segment.

Exercice R19. Considérons f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ définie par le graphe suivant :



1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement. On ne cherchera pas à exprimer sa limite f.
2. Montrer qu'il n'y a pas CU.
3. Montrer que f est intégrable et pourtant $f(x)$ ne tend pas ver 0 en $+\infty$.

$\boxed{1}$ Soit x dans $\mathbb{R}^+$. À partir d'un certain rang, on va avoir $x \leq n - \frac{1}{n^2}$ et donc $f_n(x) = 0$.
Ainsi, la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

est une somme finie. Elle est donc convergente. Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement.

$\boxed{2}$ On remarque que

$$f_n(n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

donc f_n ne converge pas uniformément vers 0.
La série $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément, car

$$\sum f_n \text{ CU} \implies f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CU}{\longrightarrow}} 0$$

$\boxed{3}$ Soit x dans $\mathbb{R}^+$. Comme dans la première question, il existe N_x tel que pour tout $n \geq N_x$, $f_n(x) = 0$.
On a alors :

$$\int_0^x f \;=\; \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n \;=\; \int_0^x \sum_{n=1}^{N_x} f_n \;=\; \sum_{n=1}^{N_x} \int_0^x f_n$$

car la somme est finie.
De plus,

$$\sum_{n=1}^{N_x} \int_0^x f_n \;\leq\; \sum_{n=1}^{N_x} \frac{1}{n^2} \;\leq\; \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

Comme f est positive, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f$$

est croissante et majorée d'après (1). Elle est donc convergente d'après le théorème des limites monotones.

Correction des exercices de références

Exercice R20. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la définition d'un produit scalaire puis rappeler les deux formes du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Utiliser l'algorithme de Gramm-Schmidt pour transformer la famille (A, B, C) en une famille (A', B', C') orthonormale.
3. On note $F = \text{Vect}(A, B, C)$ et on admet que la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$
est dans F. Déterminer les coordonnées de M dans la base (A', B', C') de F
4. Déterminer enfin la matrice de la projection sur F dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

$\boxed{1}$ Les deux formes du produit scalaire sont :

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B) = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}$$

$\boxed{2}$ On transforme tout d'abord la famille (A, B, C) en une famille orthogonale (A'', B'', C'') : On prend $A'' = A$, puis :

$$B'' = B - \langle B, A''\rangle \frac{A''}{\|A''\|^2} = B - 0.A'' = B$$

Enfin :

$$\begin{aligned} C'' &= C - \langle C, A''\rangle \tfrac{A''}{\|A''\|^2} - \langle C, B''\rangle \tfrac{B''}{\|B''\|^2} \\ &= C - \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de normé ces vecteurs. La famille (A', B', C') cherchée est donc :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{3}$ La famille (A', B', C') est une base orthonormale de F. Les coordonnées de M dans cette base sont donc :

$$\begin{pmatrix} \langle M, A'\rangle \\ \langle M, B'\rangle \\ \langle M, C'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{11}{\sqrt{2}} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ Notons p la projection orthogonale sur F. D'après l'expression du projeté orthogonale dans une base orthonormal, on a pour tout N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$p(N) = \langle M, A'\rangle A' + \langle M, B'\rangle B' + \langle M, C'\rangle C'$$

Soit encore :

$$p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b+c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{a+b-c-d}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après simplification :

$$p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a+b-c+d & a+3b+c-d \\ -a+b+3c+d & a-b+c+3d \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice de p dans la base canonique est :

$$[p]_c = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice R21. Pour des polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente converge pour tous polynômes P et Q.
2. Montrer que $\langle , \rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}[X]$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons T_n le n^e^polynôme de Tchebitchev, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{1}$ La fonction $f \times g$ est continue sur le segment $[-1,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée. On a donc :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in [-1,1],\ |f(t)g(t)| \leq M.$$

Ainsi :

$$\forall t \in [-1,1],\ \left|\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}.$$

De plus, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[M\arcsin(t)\Big]_{-1}^{1} = \pi M$$

est convergente. Les fonctions étant positives, on peut appliquer le théorème de comparaison. L'intégrale définissant $(f|g)$ est donc convergente.

$\boxed{2}$ D'après la question 1, l'application $(\ldots|\ldots)$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• <u>Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est linéaire à gauche.</u>
Soient f, g, h dans E et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g|h) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda f(t)\ +\ \mu g(t))h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \lambda\int_{-1}^{1} \frac{f(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\ +\ \mu\int_{-1}^{1} \frac{g(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \lambda(f|h)\ +\ \mu(g|h)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche.

• <u>Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est symétrique.</u>
Soient f, g dans E :

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = (g|f)$$

Ainsi $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est bilinéaire.
C'est automatique car l'application est linéaire à gauche et symétrique.

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est positive.
Par positivité de l'intégrale, on a pour f dans E :

$$\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0 \implies \int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0 \implies (f|f) \geq 0$$

• Montrons que $(\ldots|\ldots)$ est définie positive. Soit f dans E :

$$(f|f) = 0 \implies \int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive et **continue** donc :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \implies \forall t \in]-1,1[, \quad f(t) = 0$$

Par continuité, on a $f = 0$.

$\boxed{3}$ Soient p, q dans $\{0, \ldots, n\}$ tels que $p \neq q$.

$$\langle T_p, T_q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Effectuons le changement de variable (C^1 et strictement décroissant) $\theta = \arccos(x)$, donc $d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et :

$$\langle T_p, T_q \rangle = -\int_{\pi}^{0} T_p(\cos(\theta))T_q(\cos(\theta)) \, d\theta = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta) \, d\theta.$$

Comme :

$$\cos(p\theta)\cos(q\theta) = \frac{1}{2}\left[\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta)\right],$$

on obtient :

$$\langle T_p, T_q \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((p+q)\theta) \, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((p-q)\theta) \, d\theta.$$

Or $p+q$ et $p-q$ sont des entiers non nuls et :

$$\int_0^{\pi} \cos(k\theta) \, d\theta = \left[\frac{\sin(k\theta)}{k}\right]_0^{\pi} = 0.$$

pour tout k de $\mathbb{Z}^*$.
Ainsi :

$$\langle T_p, T_q \rangle = 0.$$

Donc la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice R22. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les espaces vectoriels formés respectivement par les matrices symétriques et par les matrices anti-symétriques de taille n.

1. Rappeler le théorème de projection dans un espace préhilbertien.
2. Montrer que $(A/B) = \mathrm{tr}\left(A^T.B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note
$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \underset{B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \|A-B\| = \underset{B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \sqrt{(A-B/A-B)}$$
Justifier l'existence de $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
5. montrer que :
$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\|\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)\right\|$$

$\boxed{1}$ Rappelons le théorème de projection. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de E tel que $E = F \oplus F^\perp$. Alors pour tout x de E on a :
$$d(x,F) = \|x-p(x)\|$$
où p est la projection orthogonale sur F. On remarquera que cette projection existe grâce à l'hypothèse $E = F \oplus F^\perp$.

$\boxed{2}$ Tout d'abord, montrons que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$$
où A_{ij} désigne le coefficient de A en position (i,j) :
$$\mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{j=1}^n (A^T B)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (A^T)_{ji} B_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$$
Avec cette nouvelle forme, il est facile de montrer que c'est un produit scalaire. [...]

$\boxed{3}$ • Montrons tout d'abord que $S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$.
Soit S dans $S_n(\mathbb{R})$ et A dans $A_n(\mathbb{R})$. On a
$$\langle A, S\rangle = \mathrm{tr}(A^T S) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA)$$
De plus :
$$\langle A, S\rangle = \langle S, A\rangle = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}(SA)$$
Donc $\mathrm{tr}(AS) = 0$ et $\langle S, A\rangle = 0$. On a bien
$$S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$$

• Montrons à présent que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. D'après le premier point, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. De plus :
$$\dim(S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})) = \dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$$
or $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc égalité.

$\boxed{4}$ Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble
$$E = \left\{ \|A-B\| \ / \ B \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$$
est un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et minoré par 0. D'après l'axiome de la borne supérieure, la borne inférieure existe.

$\boxed{5}$ D'après la question 3, on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})^\perp$$

avec $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$. Ainsi on peut appliquer le théorème de projection. Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$d(A, S_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|.$$

où p est la projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$. Or

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} \in S_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

donc $p(A) = \frac{A+A^T}{2}$ et

$$d(A, S_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{A - A^T}{2} \right\|.$$

Intégrales à paramètres.

Correction des exercices de références

Exercice R23. Déterminer la limite des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \qquad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}dt$$

$\boxed{1}$ Posons $f_n(t) = \sin^n(t)$ pour t dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

- La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $]0; \frac{\pi}{2}[$,
- Les fonctions f_n et 0 sont continues par morceaux,
- $|f_n(t)| \leq 1 \underset{\text{def}}{=} g(t)$ pour tout t de $]0; \frac{\pi}{2}[$,
- la fonction g est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \quad = \quad \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$$

soit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \quad = \quad \int_0^{+\infty} 0\,dt \quad = \quad 0$$

$\boxed{2}$ Posons $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ pour $n \geq 1$.

- $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout t de $]0, +\infty[$ donc la suite (f_n) converge simplement vers 0.
- f_n et 0 sont continues par morceaux.
- $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \underset{\text{def}}{=} g(t)$
- g est intégrable sur $]0, +\infty[$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \quad = \quad \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$$

soit

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0\,dt \quad = \quad 0$$

$\boxed{3}$ Posons $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2+t^n}$ pour t dans $]0, +\infty[$.

- $f_n(t) \quad = \quad \dfrac{1}{1+t^2+t^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t<1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } t=1 \\ 0 & \text{si } t>1 \end{cases} \underset{def}{=} f(t)$
- f_n et f sont continues par morceaux.
- $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \underset{def}{=} g(t)$
- g est intégrable sur $]0, +\infty[$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$$

soit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \;=\; \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} 0\,dt \;=\; \frac{\pi}{4}$$

Exercice R24. Soit f la fonction :

$$F(x) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}\,dt$$

1. Quelle est le domaine de définition de F ?
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis calculer F'.
3. En déduire la valeur de $F(x)$.

Pour tout t de $]0,+\infty[$ et tout x de $\mathbb{R}$, notons :

$$f(x,t) \;=\; e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}$$

$\boxed{1}$ Comme $|\sin(x)| \le |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall t \in]0;+\infty[,\quad |f(x,t)| \;\le\; |x|e^{-t}$$

De plus, $t \mapsto |x|e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car :

$$\int_0^{+\infty} |x|e^{-t}\,dt \;=\; |x|\Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} \;=\; |x|$$

Donc $t \mapsto f(x,t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Ainsi, le domaine de définition de F est $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale.
— $t \mapsto f(x,t)$ est C^1 par théorème généraux et :

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,t) \;=\; e^{-t}\cos(xt)$$

— $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable d'après la question 1.
— $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ est continue par morceaux.
— $\left|\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \;=\; \left|e^{-t}\cos(xt)\right| \le e^{-t} \underset{\text{def}}{=} g(t)$
— g est intégrable.
Les hypothèses sont vérifiées, on peut en déduire que f est C^1 et que :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,dt$$

$\boxed{3}$ Calculons F'.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}\,dt\right) \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-t}e^{ixt} - 1\right)\cdot\frac{1}{ix-1}\right) \end{aligned}$$

Or e^{ixt} est bornée et $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{Re}\left(\frac{-1}{ix-1}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\cdot\frac{1+ix}{1+ix}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tq :

$$F(x) = \arctan(x) + C$$

En évaluant en 0, on trouve $C = 0$. Donc :

$$F(x) = \arctan(x)$$

Exercice R25. En faisant apparaitre une série géométrique, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \frac{\pi^2}{6}$$

Tout d'abord :

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{t}{e^t}\cdot\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t}{e^t}(e^{-t})^n$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'inversion série-intégrale. Posons pour tout t de $]0,+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$f_n(t) = t(e^{-t})^{n+1}$$

- $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers $\dfrac{t}{e^t-1}$
- f_n et $\dfrac{t}{e^t-1}$ sont continues par morceaux.
- Vérifions que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |t(e^{-t})^{n+1}|\,dt$ converge en la calculant. Effectuons une IPPG en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = t & v(t) = -\frac{(e^{-t})^{n+1}}{n+1} \\ u'(t) = 1 & v'(t) = (e^{-t})^{n+1} \end{array}$$

Le crochet :

$$\left[-\frac{t\,e^{-t(n+1)}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = 0$$

est convergent par croissances comparées, ce qui justifie l'utilisation de l'IPPG. On obtient :

$$I_n = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t(n+1)}}{n+1}\,dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

- Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\infty}|te^{-t(n+1)}|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

converge d'après Riemann.

Les hypothèses du théorème d'interversion série-intégrale sont réalisées. On a donc :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty} te^{-(n+1)t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\,dt$$

Soit encore :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice R26. La fonction gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) \quad = \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est dérivable et calculer sa dérivée.

$\boxed{1}$ L'intégrale est impropre en 0 (si $x < 1$) et en $+\infty$.

- **En** $+\infty$: par croissance comparée,

$$t^2 e^{-t}\, t^{x-1} \quad = \quad t^{1+x} e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$e^{-t} t^{x-1} \quad = \quad o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge et que les fonctions sont positives, on en déduit grâce au théorème de comparaison que Γ est convergente en $+\infty$.

- **En 0** : comme $e^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Les fonctions étant positives, d'après le théorème de comparaison, Γ a la même nature en 0 que :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$$

On reconnaît une intégrale de Riemann. Ainsi :

$$\Gamma \text{ converge en } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x < 1$$

Donc Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{2}$ Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale. Posons :

$$f(x,t) \quad = \quad e^{-t} t^{x-1} \quad = \quad e^{-t} e^{(x-1)\ln(x)}$$

- $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \quad = \quad \ln(t) e^{-t} t^{x-1}$$

- $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable d'après la question 1.

- $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.

- Soit $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \quad = \quad |\ln(t)| e^{-t} t^{x-1} \quad \leq \quad |\ln(t)| e^{-t}\left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) \underset{\text{def}}{=} g(t)$$

En effet :

$$\begin{cases} \text{si } t \leq 1\ , & t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)} \leq t^{a-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \\ \text{si } t \geq 1, & t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)} \leq t^{b-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \end{cases}$$

- Montrons que la fonction g est intégrable :

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |\ln(t)| e^{-t} t^{a-1}\, dt + \int_0^{+\infty} |\ln(t)| e^{-t} t^{b-1}\, dt$$

Il reste à montrer que

$$\int_0^{+\infty} |\ln(t)| e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$$

est convergente pour tout α de $\mathbb{R}_+^*$. Elle est impropre en 0 et en $+\infty$. En $+\infty$: par croissance comparée

$$t^2 |\ln(t)| e^{-t} t^{\alpha-1} = t^{\alpha+1} |\ln(t)| e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$|\ln(t)| e^{-t} t^{\alpha-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Et on termine comme dans la question 1. En 0 : cherchons un équivalent :

$$|\ln(t)| e^{-t} t^{\alpha-1} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha} \ln^{-1}(t)}$$

On reconnaît dans

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha} \ln^{-1}(t)}\, dt$$

une intégrale de Bertrand convergente car $\alpha > 0$. On peut appliquer le théorème de comparaison car les fonctions sont positives. On en déduit que g est intégrable.

Les hypothèses de dérivation sous le signe intégrale sont vérifiées. La fonction Γ est donc C^1 et :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Correction des exercices de références

Exercice R27. Déterminer la nature des applications linéaires définies, dans une base orthonormale, par les matrices :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ Détermination de la nature de A de la matrice :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- Etape 1. Montrons que A est orthogonale. Pour cela, calculons AA^T :

$$AA^\top = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = I$$

Donc A est une matrice orthogonale.

- Etape 2. La matrice A est-elle dans $\mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$?

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On a :

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 21 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = -C_3$$

Cela montre que A est dans $\mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$.

- Etape 3. Détermination des points fixes de A. On cherche E_1.

$$E_1 = \ker(I - A) = \ker(7I - 7A) = \ker\begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois lignes étant proportionnelles, on obtient :

$$E_1 = \ker\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, A possède un plan de points fixes.

- Etape 4. Nature de A. D'après la classification des isométries, A est une **réflexion**.

Si On ne peut pas utiliser le théorème de classification, on peut aussi vérifier que $A^2 = I$. On en déduit alors que A est une symétrie, orthogonale car A est orthogonale, et possède un plan de points fixes. Il s'agit bien d'une réflexion.

- Etape 5. Conclusion. La matrice A est une réflexion par rapport au plan E_1.

$\boxed{2}$ Déterminons la nature de la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Étape 1. Montrons que A est une matrice orthogonale.

$$AA^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

Donc A est bien une matrice orthogonale.

- Étape 2. La matrice A est-elle dans $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$? Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on a :

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_3$$

Donc A est dans $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

- Étape 3. Déterminons les points fixes de A.

$$E_1 = \ker(I - A) = \ker(3I - 3A) = \ker\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Effectuons les opérations élémentaires : $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$E_1 = \ker\begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 0 & 9 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A admet une droite de points fixes.

- Étape 4. Nature de A. D'après la classification des isométries directes, A est une rotation d'axe E_1.

- Étape 5. Déterminons l'angle de la rotation.

Tout d'abord

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc

$$\cos\theta + 1 = \operatorname{tr}(A) = -\frac{2}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos\theta = -\frac{5}{6}$$

Ainsi,

$$|\theta| = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \approx 146°$$

Pour trouver le signe de θ, il faut orienter l'axe E_1. On oriente donc E_1 par

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

un vecteur orthogonal à E_1. On a alors

$$\frac{\det(\vec{u}, A\vec{u}, \vec{a})}{\|\vec{u}\|\|A\vec{u}\|} = \sin(\theta)$$

De plus, avec l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$:

$$\det(\vec{u}, A\vec{u}, \vec{a}) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -29 & -10 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -29 & -10 \end{vmatrix}$$

Donc

$$\det(\vec{u}, A\vec{u}, \vec{a}) = \frac{1}{3}((-1)(-10) - 5(-29)) = \frac{1}{3}(10 + 145) = \frac{155}{3} > 0$$

Donc $\sin\theta \geq 0$ avec θ dans $]-\pi, \pi[$. Donc θ est positif et

$$\theta = +\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \approx 146°$$

$\boxed{3}$ Déterminons la nature de

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

- Étape 1. Montrons que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

$$A \cdot A^T = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = I$$

- Étape 2. Montrons que A est une matrice orthogonale. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A.

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = -C_3$$

Donc A appartient à $\mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$.

- Étape 3. Points fixes de A.

$$E_1 = \ker(I - A) = \ker(9I - 9A) = \ker\begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -4 & 17 & 1 \\ 4 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, on obtient :

$$E_1 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & -72 \\ 0 & 18 & 18 \\ 4 & 1 & 17 \end{pmatrix} = \{0\}$$

Ainsi, seul 0 est fixe.

- Étape 4. Avec la classification des isométries de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que A est la composée :
  - d'une réflexion par rapport a
  - d'une rotation d'axe E_{-1}, d'

- Étape 5. Points contravariants de A :

$$E_{-1} \;=\; \ker(I + A) \;=\; \ker(9I + 9A) \;=\; \ker\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$E_{-1} \;=\; \ker\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Étape 6. Angle θ.

Tout d'abord, on a :

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mathrm{tr}(A) \;=\; \frac{-23}{9} \;=\; -1 + 2\cos(\theta)$$

c'est-à-dire :

$$\cos(\theta) \;=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{23}{9} + 1\right) \;=\; \frac{-14}{18} = -\frac{7}{9}$$

Ainsi :

$$|\theta| \;=\; \arccos\left(-\frac{7}{9}\right) \;\approx\; 141°$$

Pour déterminer le signe de θ, il faut orienter l'axe E_{-1}. On oriente E_{-1} par

$$\overrightarrow{a} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On choisit un vecteur $\overrightarrow{u}$ perpendiculaire à E_{-1} :

$$\overrightarrow{u} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\frac{\det(\vec{u}, A\vec{u}, \vec{a})}{\|\vec{u}\|\,\|A\vec{u}\|\,\|\vec{a}\|} \;=\; \sin(\theta)$$

Donc :

$$\sin(\theta) \;=\; \frac{1}{9\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \;>\; 0$$

Comme $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\sin\theta > 0$ implique $\theta > 0$, et donc :

$$\theta \;=\; +\arccos\left(-\frac{7}{9}\right) \;\approx\; 144°$$

- Compléments. Voilà la démarche si on ne peut pas utiliser la classification des isométries indirectes.

  - On cherche S, la matrice de la réflexion par rapport à E_{-1}.
  - On pose $R = SA$, et on vérifie que R est une rotation.
  - Ainsi $A = SR$ sera la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Pour déterminer S, on peut décomposer un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $E_1 \oplus E_1^{\perp}$. Après calcul, on trouve :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{2} \\ \frac{z-y}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$Sx = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{2} \\ \frac{z-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule R :

$$R = SA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons au passage que $R = AS$. La matrice R est une matrice de $\mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ car c'est le produit de deux matrices de $\mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$.
D'après la classification des isométries directes, c'est une rotation d'angle θ avec :

$$2\cos(\theta) + 1 = \operatorname{tr}(R) = \frac{-5}{9}$$

Donc :

$$|\theta| = \arccos\left(\left(\frac{-5}{9} - 1\right) \times \frac{1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$$

Il faut ensuite orienter E_1 comme dans l'étape 6.

Exercice R28. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Notons λ_{min} et λ_{max} la plus petite et la plus grande de ses valeurs propres. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lambda_{min}\|x\|^2 \leq (u(x)/x) \leq \lambda_{max}\|x\|^2$$

Remarquons que u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. D'après le théorème spectral, ses valeurs propres sont réelles. Ainsi parler de la plus grande ou de la plus petite des valeurs propres a bien un sens.

Toujours d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$$

de vecteurs propres. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à $e_1, \ldots, e_n$. On a alors pour x de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \langle u(x), x\rangle &= \left\langle u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \qquad \text{(car } \mathcal{B} \text{ B.O.N.)} \end{aligned}$$

Or $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \;\leq\; \langle u(x), x\rangle \;\leq\; \lambda_{\max}\|x\|^2$$

Exercice R29. Soit A une matrice réelle de colonnes C_1,...,C_p.

1. Montrer $A^T A$ a pour coefficients (m_{ij}) avec :

$$m_{ij} \;=\; \langle C_i, C_j\rangle \;=\; C_i^T.C_j$$

2. Montrer que $Ker(A^T A) = Ker(A)$. En déduire que $rg(A^T A) = rg(A)$.
3. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes réelles positives.

$\boxed{1}$ Calculons $A^T A$.

$$A^T A \;=\; \begin{pmatrix} C_1^T \\ \hline C_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline C_p^T \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{array}\right)$$

Donc :

$$A^T A \;=\; \begin{pmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_2 & \cdots & C_1^T C_p \\ C_2^T C_1 & C_2^T C_2 & \cdots & C_2^T C_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_p^T c_1 & C_p^T C_2 & \cdots & C_p^T C_p \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$A^T A \;=\; \begin{pmatrix} \langle C_1, C_1\rangle & \langle C_1, C_2\rangle & \cdots & \langle C_1, C_p\rangle \\ \langle C_2, C_1\rangle & \langle C_2, C_2\rangle & \cdots & \langle C_2, C_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle C_p, C_1\rangle & \langle C_p, C_2\rangle & \cdots & \langle C_p, C_p\rangle \end{pmatrix}$$

On a donc bien $m_{ij} = \langle C_i, C_j\rangle$.

$\boxed{2}$ • Montrons que $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$

$$x \in \ker(A) \implies Ax = 0 \implies A^T Ax = A^T 0 \implies x \in \ker(A^T A)$$

• Montrons que $\ker(A^T A) \subset \ker(A)$

$$\begin{array}{lllllll} x \in \ker(A^T A) & \implies & A^T Ax = 0 & \implies & x^T A^T Ax = 0 & \implies & \|Ax\|^2 = 0 \\ & \implies & Ax = 0 & \implies & x \in \ker(A) & & \end{array}$$

On a donc bien :

$$\ker(A) \;=\; \ker(A^T A)$$

$\boxed{2'}$ En utilisant le théorème du rang sur les matrices A et $A^T A$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} p & = & \dim(\ker(A^T A)) & + & \mathrm{rg}(A^T A) \\ p & = & \dim(\ker(A)) & + & \mathrm{rg}(A) \end{array} \right.$$

Par soustraction et en utilisant que $\ker(A^T A) = \ker(A)$, on trouve :

$$\mathrm{rg}(A^T A) \;=\; \mathrm{rg}(A)$$

$\boxed{3}$ Montrons tout d'abord que $A^T A$ est symétrique.

$$(A^T A)^T \;=\; A^T (A^T)^T \;=\; A^T A$$

Ainsi, $A^T A$ est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Ses valeurs propres sont donc réelles. Il reste à montrer qu'elles sont positives.
Soit λ une valeur propre de $A^T A$ et X un vecteur propre associé.

$$\begin{array}{rcl} A^T AX = \lambda X & \Longrightarrow & X^T A^T AX = \lambda X^T X \\ & \Longrightarrow & \|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \end{array}$$

Comme $\|X\| \neq 0$ puisque X est un vecteur propre, on obtient $\lambda \geq 0$.

Exercice R30. Soit S dans $S_n(\mathbb{R})$. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le pse classique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que S est définie positive ssi $\phi(X,Y) \;=\; \langle X, SY\rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev mais c'est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{1}$ $(\Rightarrow)$

Supposons S définie positive. Montrons que φ est un produit scalaire.
— φ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
— φ est linéaire à gauche car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.
— φ est symétrique car pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(X,Y) \;=\; \langle X, SY\rangle \;=\; X^T SY = X^T S^T Y \;=\; \langle SX, Y\rangle \;=\; \langle Y, SX\rangle \;=\; \varphi(Y,X)$$

donc φ est automatiquement bilinéaire.
— φ est positive. Comme A est dans $S_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème spectral, il existe $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à $e_1, \ldots, e_n$. On a alors pour X de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans β :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(X,X) & = & \langle X, SX\rangle \\ & = & \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} x_j S e_j \right\rangle \\ & = & \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j e_j \right\rangle \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle \end{array}$$

Or $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée. Donc :

$$\varphi(X,X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i \;\geq\; 0$$

car les λ_i sont positifs.
— φ est définie positive. Soit X dans $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans β.
Si $\varphi(X,X) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i = 0$$

Comme $\lambda_i \geq 0$ on a une somme de termes positifs nuls. Tous les termes sont donc nuls :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_i x_i^2 = 0$$

Or $\lambda_i \neq 0$ donc $x_i = 0$ pour tout i, et donc $X = 0$.

L'application φ est donc bien un produit scalaire si S est une matrice symétrique définie positive.

($\Leftarrow$)

Supposons que φ soit un produit scalaire. Montrons que $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit λ une valeur propre de S et X un vecteur propre associé. On a alors, puisque $X \neq 0$:

$$\varphi(X,X) \;>\; 0 \implies X^T SX > 0 \implies \lambda\|X\|^2 > 0 \implies \lambda > 0$$

Donc $Sp(S) \subset \mathbb{R}_*^+$.

$\boxed{2}$ Tout d'abord, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel car par exemple :

$$I \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad -I \notin S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Montrons à présent que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe. Soient S et T dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et α dans $[0,1]$. Montrons que $\alpha S+(1-\alpha)T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme $\alpha S+(1-\alpha)T$ est clairement symétrique, il suffit de montrer que les valeurs propres de $\alpha S+(1-\alpha)T$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit λ une valeur propre de $\lambda S+(1-\lambda)T$ et X un vecteur propre associé. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda\|X\|^2 &= \Big\langle \lambda X \,,\, X \Big\rangle \\
&= \Big\langle (\alpha S+(1-\alpha)T)X \,,\, X \Big\rangle \\
&= \alpha\Big\langle SX, X\Big\rangle \;+\; (1-\alpha)\Big\langle TX, X\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $\langle SX,X\rangle$ et $\langle TX,X\rangle$ sont strictement positifs. De plus α et $1-\alpha$ sont positifs et pas nuls en même temps. Donc $\lambda\|X\|^2 > 0$. Ainsi, on a bien :

$$\mathrm{Sp}(\lambda S+(1-\lambda)T) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Correction des exercices de références

Exercice R31. Soit α dans $\mathbb{R}$ et a dans $\mathbb{R}^*$. Notons P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum n! z^n$
3. $\sum \frac{z^n}{n}$
4. $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$
5. $\sum \frac{z^n}{a^n}$
6. $\sum \frac{2^n z^n}{n!}$
7. $\sum \frac{n! z^n}{n^n}$
8. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$
9. $\sum 2^n z^{2n}$
10. $\sum \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\right) z^n$
11. $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right) z^n$
12. $\sum P(n) z^n$

$\boxed{1}$ Posons $a_n = \frac{1}{n!}$. On a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, on en déduit que le rayon de convergence de la série exponentielle est $+\infty$.

$\boxed{2}$ Posons $a_n = n!$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence vaut 0.

$\boxed{3}$ Posons $a_n = \frac{1}{n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence vaut $\frac{1}{1} = 1$.

$\boxed{4}$ Posons $a_n = \frac{1}{n^k}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

$\boxed{5}$ Posons $a_n = \frac{1}{a^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence vaut a.

$\boxed{6}$ Posons $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence vaut $+\infty$.

$\boxed{7}$ On pose $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de cette série est e.

$\boxed{8}$ On pose $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}$$

Donc

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left[1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right] \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de cette série est $\frac{1}{1} = 1$.

$\boxed{9}$ **Attention ! Il s'agit d'une série lacunaire !** On ne peut pas utiliser le théorème de D'Alembert - version série entière. On utilise D'Alembert - version série numérique.
Posons $a_n = 2^n \cdot z^{2n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1} \cdot z^{2n+2}}{2^n \cdot z^{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2|z|^2$$

Ainsi :
— si $2|z|^2 < 1$ c'est-à-dire $|z| < \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors la série converge,
— si $2|z|^2 > 1$ c'est-à-dire $|z| > \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors la série diverge.
Le rayon de convergence est donc égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{10}$ Posons $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. Déterminons un équivalent de a_n :

$$a_n = e^{\frac{1}{n}\ln n} - e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left[1 - e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1) - \frac{1}{n}\ln(n)}\right]$$

Or, par croissances comparées :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\ln(n+1) - \dfrac{1}{n}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ 1 - e^x \underset{0}{\sim} -x \end{cases}$$

On a donc :

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(-\frac{1}{n+1}\ln(n+1) + \frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

De plus par croissance comparée $\frac{1}{n}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} a_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln(n) - \frac{1}{n+1}\ln(n+1) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln(n) - \frac{1}{n+1}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\ln(n) + \frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n)} = \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n(n+1)}\ln(n)\right)$$

Et :

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\ln(n)$$

D'après le théorème de comparaison des séries entières, la série a le même rayon que $\sum \frac{1}{n^2}\ln(n)z^n$ D'après la question (8), le rayon est 1.

$\boxed{11}$ Posons $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$
On reconnaît la série harmonique et on sait que :

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries entières, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum \ln(n) z^n$ ont le même rayon de convergence. Posons $b_n = \ln(n)$.

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc le rayon de convergence est $\frac{1}{1} = 1$

$\boxed{12}$ Si $P = 0$, alors le rayon de convergence est clairement $+\infty$. Si $P \neq 0$, alors il existe $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P(x) = a_0 + \cdots + a_d x^d, \quad \text{avec } a_d \neq 0$$

Donc :

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_d x^d$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries entières, les séries $\sum P(n) z^n$ et $\sum a_d n^d z^n$ ont le même rayon de convergence. De plus :

$$\left|\frac{a_d (n+1)^d}{a_d n^d}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^d \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après le critère de D'Alembert, le rayon de convergence des deux séries est $\frac{1}{1} = 1$.

Exercice R32. Calculer les sommes des séries suivantes pour x dans $]-1;1[$:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} k x^k \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} k^2 x^k \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Posons :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

pour x dans $]-1,1[$. On a donc

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Enfin

$$S_1 = x f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

En dérivant à nouveau la relation précédente, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4}$$

On a alors, en multipliant par x :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{(1-x+2x)x}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3}$$

Soit F la primitive de f s'annulant en 0 :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) \end{cases}$$

Donc :

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Exercice R33. Considérons l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

pour x dans $\mathbb{R}_+^*$

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle développable en série entière.
2. Effectuer le changement de variable $t = \ln(x)$ dans l'équation homogène.
3. En déduire les solutions.

$\boxed{1}$ Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une solution de l'équation différentielle, de rayon $R > 0$. On a alors :

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 4x \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \big[(n(n-1) + 4n + 2)\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Or deux séries entières de rayons non nuls sont égales si et seulement si les coefficients sont égaux. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!} = a_n[n(n-1) + 4n + 2] = a_n[n^2 + 3n + 2] = a_n(n+2)(n+1)$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

On a donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} x^k = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$\boxed{2}$ Posons :

$$\begin{cases} t = \ln(x) \\ z(t) = y(x) = y(e^t) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x) \\ z''(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(e^t) = x^2 y''(x) + z'(t) \end{cases}$$

Donc l'équation différentielle homogène (EH) devient :

$$(z''(t) - z'(t)) + 4z'(t) + 2z(t) = 0$$

Soit encore :

$$z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$$

$\boxed{3}$ Résolvons l'équation homogène. L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2) = 0$$

Donc les solutions de l'équation homogène sont les :

$$z_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$. Donc les solutions complètes sont :

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Exercice R34. Montrer que toute fonction C^∞ vérifiant :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \left|f^{(n)}\right| \leq M$$

est développable en série entière.

La fonction f tant C^∞, on peut appliquer la formule de Taylor reste intégrale (Taylor–Lagrange fonctionne aussi) entre 0 et x à l'ordre n, avec n dans $\mathbb{N}$..

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt$$

Pour montrer que f est développable en série entière, il suffit de montrer que le reste intégral tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| &\leq \int_0^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \right| (x-t)^n dt \\
&\leq M \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\
&\leq M \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x \\
&\leq M \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, le théorème d'encadrement nous permet de conclure que le reste tend vers 0 et donc que la fonction f est développable en série entière :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Correction des exercices de références

Exercice R35. On lance 2 dés à 6 faces et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant le résultat des ces dés.

1. Notons S la variable aléatoire donnant la somme des valeurs indiquées par les dés. Donner la loi de S, son espérance et son écart type.
2. Notons D la variable aléatoire donnant la différence des dés en valeur absolue. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
3. Notons M le maximum des deux dés. Exprimer la loi conjointe (X_1, M). En déduire la loi marginale M.
4. Si la somme fait 7 vous gagnez 4 euros, sinon vous perdez un euros. Est-ce un jeu financièrement intéressant ?

$\boxed{1}$ Effectuons un tableau pour déterminer la somme de deux dés à 6 faces :

Dés	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ainsi, la loi de S :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\boxed{2}$ Remarquons que :

$$\begin{array}{lclcl} P(D=0, S=2) & = & P(X_1 = X_2 = 1) & = & \frac{1}{36} \\ P(D=0) & = & P(X_1 = X_2) & = & \frac{1}{6} \\ P(S=2) & = & P(X_1 = X_2 = 1) & = & \frac{1}{36} \end{array}$$

Ainsi :

$$P(D=0, S=2) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6 \times 36} = P(D=0) \cdot P(S=2)$$

Les variables aléatoires D et S ne sont pas indépendantes.

$\boxed{3}$ Donnons la loi conjointe (M, X_1) et la loi marginale M sous forme de tableau.

$M \backslash X_1$	1	2	3	4	5	6	Loi de M
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	0	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{11}{36}$

En effet, pour k, ℓ dans $\{1, \dots, 6\}$,

$$\begin{array}{lllll}
\bullet \text{ Si } \ell < k, & P(X_1 = k, M = \ell) & = & 0 & \\
\bullet \text{ Si } \ell = k, & P(X_1 = k, M = \ell) & = & P\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} (X_1 = k, X_2 = \ell)\right) & = \dfrac{k}{36} \\
\bullet \text{ Si } \ell > k, & P(X_1 = k, M = \ell) & = & P(X_1 = k, X_2 = \ell) \;=\; \dfrac{1}{36} &
\end{array}$$

Pour la loi de M,

$$P(M = k) \;=\; P\left(\bigsqcup_{\ell=1}^{6} (M = k, X_1 = \ell)\right) \;=\; \sum_{\ell=1}^{6} P(M = k, X_1 = \ell)$$

Ainsi, il suffit donc de faire la somme sur chaque ligne pour trouver la loi de M dans le tableau.

$\boxed{4}$ Notons G le gain de ce jeu. Déterminons la loi de G. Tout d'abord $G(\Omega) = \{-1, 4\}$ puis :

$$P(G = 4) \;=\; P(S = 7) \;=\; \frac{1}{6} \qquad\qquad P(G = -1) \;=\; 1 - P(G = 4) \;=\; \frac{5}{6}$$

Déterminons l'espérance de G

$$E(G) \;=\; 4 \cdot P(G = 4) + (-1) \cdot P(G = -1) \;=\; 4 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \;=\; -\frac{1}{6}$$

L'espérance de gain est négative. Le jeu n'est pas financièrement intéressant.

Exercice R36. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ. Montrer que :

$$P\Big(X \in]\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma[\Big) \;\geq\; \frac{3}{4}$$

Utilisons la formule de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$P\big(|X - \mu| \geq \varepsilon\big) \;\leq\; \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

On pose $\varepsilon = 2\sigma$. On obtient :

$$\begin{array}{rll}
 & P\big(|X - \mu| \geq 2\sigma\big) & \leq \frac{1}{4} \\
\Longleftrightarrow & 1 - P\big(|X - \mu| < 2\sigma\big) & \leq \frac{1}{4} \\
\Longleftrightarrow & P\big(|X - \mu| < 2\sigma\big) & \geq \frac{3}{4} \\
\Longleftrightarrow & P\big(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[\big) & \geq \frac{3}{4}
\end{array}$$

Exercice R37. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(?, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par $(k \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{k}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer k
2. Déterminer les lois de X et de Y
3. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer l'espérance et la variance de Y
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $P(X = Y)$.

$\boxed{1}$ On doit avoir

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \bigsqcup_{j=0}^{\infty} (X = i, Y = j)\right) = 1$$

donc

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) &&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{2^{i+1} j!} \\ &= k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1^j}{j!} &&= k \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot e^1 \\ &= ke \end{aligned}$$

donc $k = \frac{1}{e}$.

$\boxed{2}$ On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout i de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=0}^{\infty} (X = i, Y = \ell)\right) &&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{k}{2^{i+1} \ell!} &&= \frac{k}{2^{i+1}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1^\ell}{\ell!} \\ &= \frac{ke}{2^{i+1}} &&= \frac{1}{2^{i+1}} \end{aligned}$$

De même $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout i de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = i) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j=0}^{\infty} (X = j, Y = i)\right) &&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = i) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{2^{j+1} i!} &&= \frac{k}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \\ &= \frac{k}{i!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} &&= \frac{1/e}{i!} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Tout d'abord $(1 + X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(1 + X = k) = \mathbb{P}(X = k - 1) = \frac{1}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$$

Ainsi, $1 + X$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On a donc :

$$\mathbb{E}(1 + X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \mathbb{V}(1 + X) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1 + X) - 1 = 1 \qquad \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(1 + X) = 2$$

$\boxed{4}$ La variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre 1 donc :

$$\mathbb{E}(Y) \quad = \quad \mathbb{V}(Y) \quad = \quad 1$$

$\boxed{5}$ On a pour tout i et j de $\mathbb{N}$, d'après la question 2 :

$$\mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = j) \quad = \quad \frac{1}{2^{i+1}} \cdot \frac{k}{j!} \quad = \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j)$$

Donc X et Y sont indépendants.

$\boxed{6}$ Calculons $\mathbb{P}(X = Y)$:

$$\mathbb{P}(X = Y) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty}(X = i, Y = i)\right) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = i) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{k}{2^{i+1}i!}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X = Y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{2^{i}i!} \quad = \quad \frac{k}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}{i!} \quad = \quad \frac{k}{2}\cdot\sqrt{e}$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}}$$

Correction des exercices de références

Exercice R38. Dans les 3 cas suivants, on prolonge la fonction en $(0,0)$ par 0. Déterminer si ces fonctions sont continues :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} \qquad f_2(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad f_3(x,y) = \frac{\ln(1 + x^2y^2)}{x^2+y^2}$$

$\boxed{1}$ Comme

$$f_1\left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad = \quad 1 \quad \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \quad f(0,0) \quad = \quad 0$$

La fonction f_1 n'est pas continue en $(0,0)$.

$\boxed{2}$ En majorant le sinus par 1, on trouve :

$$|f_2(x,y) - f_2(0,0)| \quad = \quad \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \quad \leq \quad |x| + |y| \quad = \quad \|(x,y)\|_1$$

Comme $\|(x,y)\|_1 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, la fonction f_2 est continue en $(0,0)$. Comme f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par théorèmes généraux, f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{3}$ Utilisons que :

$$\forall X \in]-1, \infty[, \ \ln(1+X) \ \leq \ X$$

Ainsi :

$$|f_3(x,y) - f_3(0,0)| \quad = \quad \left|\frac{\ln\left(1 + x^2y^2\right)}{x^2+y^2}\right| \quad \leq \quad \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \leq \quad \frac{x^2y^2}{x^2} \quad = \quad y^2 \quad \leq \quad x^2 + y^2 = \|(x,y)\|_2^2$$

Comme $\|(x,y)\|_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, la fonction f_3 est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$ par théorèmes généraux.

Exercice R39. Dans cet exercice on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes. Soient $\|\_\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité associée. On pose pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$|||A||| \;=\; \underset{x\in S}{sup}\,\|Ax\|$$

1. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, posons $M = Max(\|Ae_1\|,\ldots,\|Ae_n\|)$. Montrer que :

$$\forall X = (x_1\ \ldots\ x_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ \ \|AX\| \le M(|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

2. En déduire que l'ensemble $\{\|AX\| \,/\, X \in S\}$ est majoré, puis que $|||A|||$ existe.
3. Montrer que $|||\_|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour tout X de $\mathbb{R}^n$: $\|AX\| \le |||A|||.\|X\|$
5. En déduire que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|||AB||| \le |||A|||.|||B|||$. Les normes vérifiant cette propriété sont appelés des normes matricielles ou des normes d'algèbre.
6. Notons B et $\overline{B}$ les boules unités respectivement ouverte et fermée. Montrer que :

$$|||A||| \;=\; \underset{x\in\overline{B}}{Sup}\,\|Ax\| \;=\; \underset{x\in B}{Sup}\,\|Ax\| \;=\; \underset{x\in E}{Sup}\,\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$\boxed{1}$ Majorons $\|AX\|$:

$$\|AX\| \;=\; \left\|A\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right\| \;=\; \left\|\sum_{i=1}^{n}x_iAe_i\right\| \;\le\; \sum_{i=1}^{n}|x_i|\|Ae_i\| \;\le\; M\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right) \;\le\; M\|X\|_1$$

$\boxed{2}$ D'après la question précédente on a pour tout X de $\mathbb{R}^n$:

$$\|AX\| \le M\cdot\|X\|_1$$

Or $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes car en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Il existe donc α dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\|AX\| \;\le\; M\alpha\|X\| \;\le\; M\alpha$$

L'ensemble

$$\Big\{\|AX\| \,/\, X \in S\Big\}$$

est donc un ensemble non vide (Il contient 0) et majoré. D'après l'axiome de la borne supérieure, il admet un sup. L'existence de $|||A|||$ est donc acquise.

$\boxed{3}$ • Tout d'abord $|||\_|||$ est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$.

• Vérifions la séparation :

$$|||A||| = 0 \implies \sup_{x\in S}\|AX\| = 0 \implies \forall x\in S, \|AX\| = 0 \implies \forall x\in S, AX = 0 \quad (1)$$

Soit Y dans $\mathbb{R}^n$. Si $Y \neq 0$, alors d'après l'équation (1), on a :

$$AY \;=\; \|Y\|\cdot A\left(\frac{Y}{\|Y\|}\right) \;=\; \|Y\|0 \;=\; 0$$

Comme $A0 = 0$, on a $AY = 0$ pour tout Y de $\mathbb{R}^n$ et donc $A = 0$.

• Vérifions l'homogénéité : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ dans $\mathbb{R}$,

$$|||\lambda A||| \;=\; \sup_{x\in S}\|\lambda AX\| \;=\; \sup_{x\in S}|\lambda|\cdot\|AX\| \;=\; |\lambda|\cdot\sup_{x\in S}\|AX\| \;=\; |\lambda|\cdot|||A|||$$

- Vérifions enfin l'inégalité triangulaire.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|||A+B||| \;=\; \sup_{x\in S}\|Ax+Bx\| \;\le\; \sup_{x\in S}\left(\|Ax\|+\|Bx\|\right) \;\le\; \sup_{x\in S}\|Ax\|+\sup_{x\in S}\|Bx\| \;=\; |||A|||+|||B|||$$

Ainsi, $|||\cdot|||$ est bien une norme.

$\boxed{4}$ Soit x dans E non nul.

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \;=\; \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \;\le\; \sup_{y\in S}\|Ay\| \;=\; |||A|||$$

Donc :

$$\|Ax\| \;\le\; |||A|||\cdot\|x\|$$

Comme pour $x=0$, on a clairement l'inégalité.

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \|Ax\|\le|||A|||\cdot\|x\|$$

$\boxed{5}$ Soit Y dans S. D'après la question 4 :

$$\|ABY\| \;\le\; |||A|||.\|BY\| \;\le\; |||A|||.|||B|||.\|Y\| \;=\; |||A|||.|||B|||$$

On passe au sup pour Y dans S, on obtient :

$$|||AB||| \;=\; \sup_{Y\in S}\|ABY\| \;\le\; |||A|||.|||B|||$$

$\boxed{6}$ Posons pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} N_1(A) &= \sup_{X\in B}\|AX\| \\ N_2(A) &= \sup_{X\in\overline{B}}\|AX\| \\ N_3(A) &= \sup_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\|AX\|}{\|X\|} \end{aligned}$$

On justifie l'existence de N_1, N_2 et N_3 comme dans les questions 1, 2 et 3.

- **Etape 1.** Montrons que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |||A||| &\ge& N_1(A) \\ |||A||| &\ge& N_2(A) \\ |||A||| &\ge& N_3(A) \end{array}\right.$$

Soit X dans $\mathbb{R}^n$. D'après la question 4, on a :

$$\|AX\| \;\le\; |||A|||.|||X\|$$

Donc :

$$\forall X\in B,\ \|AX\|\;\le\;|||A|||\qquad \forall X\in\overline{B},\ \|AX\|\;\le\;|||A|||\qquad \forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \frac{\|AX\|}{\|X\|}\;\le\;|||A|||$$

On passe au sup pour X dans B, $\overline{B}$ ou $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, on obtient pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|||A|||\;\ge\;N_1(A)\qquad |||A|||\;\ge\;N_2(A)\qquad |||A|||\;\ge\;N_3(A)$$

- **Etape 2.** Montrons que :

$$\left\{\begin{array}{l} N_2(A)\ge|||A||| \\ N_3(A)\ge|||A||| \end{array}\right.$$

Comme $S\subset\overline{B}$ et $S\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ alors :

$$\sup_{X\in S}\|AX\|\;\le\;\sup_{X\in\overline{B}}\|AX\|\qquad\text{et}\qquad \sup_{X\in S}\|AX\|\;\le\;\sup_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

Donc :

$$N_2(A) \geq |||A||| \quad \text{et} \quad N_3(A) \geq |||A|||$$

• **Etape 3.** Montrons que $N_1(A) \geq |||A|||$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) |||A||| = \sup_{X \in S} |||A\left(1 - \frac{1}{n}\right) X|||$$

Or $Y = \left(1 - \frac{1}{n}\right) X \in B$ si $X \in S$, donc :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) |||A||| \leq \sup_{Y \in B} \|AY\| = N_1(A)$$

Donc, en passant au sup pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|||A||| \leq N_1(A)$$

Exercice R40. Montrer que :

1. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est limite de matrices triangulaires supérieures avec des éléments distincts sur la diagonale.
2. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton. On admettra que si :

$$M_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_{M_n}(M_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_M(M)$$

$\boxed{1}$ Soit

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & t_{pp} \end{pmatrix}$$

une matrice triangulaire supérieure.
Posons :

$$T_n = T + \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{p}{n} \end{pmatrix}$$

Les coefficients diagonaux de T_n sont les :

$$t'_{ii} \underset{\text{def}}{=} t_{ii} + \frac{i}{n}$$

Montrons qu'à partir d'un certain rang, les $(t'_{ii})_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ sont distincts. Soient $i \neq j$ deux indices distincts.

$$t'_{ii} - t'_{jj} = (t_{ii} - t_{jj}) + \frac{i - j}{n}$$

Si $t_{ii} = t_{jj}$ alors $t'_{ii} - t'_{jj} = \frac{i-j}{n} \neq 0$. Si $t_{ii} \neq t_{jj}$, alors :

$$t'_{ii} - t'_{jj} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_{ii} - t_{jj} \neq 0$$

Donc à partir d'un certain rang $t'_{ii} \neq t'_{jj}$.
Ainsi, quitte à enlever les premiers termes de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut considérer que la suite (T_n) est une suite de matrices triangulaires à coefficients diagonaux distincts. Comme la suite (T_n) tend vers T, on a le résultat.

$\boxed{2}$ Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On trigonalise A sur $\mathbb{C}$. Il existe donc P dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ et T dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$A = PTP^{-1}$$

D'après la question 1, la matrice T est la limite d'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices triangulaires à coefficients diagonaux distincts. Comme les coefficients diagonaux des T_n sont aussi les valeurs propres de T_n, les valeurs propres des T_n sont distinctes et donc les T_n sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$. Posons :

$$A_n = PT_nP^{-1}$$

Les matrices A_n sont diagonalisables car les T_n le sont. On a donc l'existence d'une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ qui converge vers A. L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est donc dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{3}$ Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe donc une suite (A_n) de matrices diagonalisables qui tend vers A. Notons

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

et posons Δ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\Delta(A) = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

C'est le discriminant du polynôme caractéristique de A puisque :

$$\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$$

Comme A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, les valeurs propres de A_n sont réelles et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta(A_n) \geq 0 \quad (1)$$

De plus, Δ est continue car :
— tr est $\mathcal{C}^0$ car c'est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$;
— det est $\mathcal{C}^0$ car c'est une application polynômiale.
— $f(x,y) = x^2 - 4y$ est $\mathcal{C}^0$ car c'est une application polynomiale de $\mathbb{R}^2$.
Grâce à l'équation (1), on obtient :

$$-4 = \Delta(A) = \Delta\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Delta(A_n) \geq 0$$

Absurde.

$\boxed{4}$ Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• Étape 1.
Soit X un vecteur propre de M. Soit λ la valeur propre associée à X, on a :

$$\chi_M(M)\cdot X = \chi_M(\lambda)\cdot X = 0$$

On a donc $\chi_M(M)\cdot X = 0$ pour tout vecteur propre X.

• Étape 2. Si M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, alors il existe une base de vecteurs propres. D'après l'étape 1, $\chi_M(M)$ est nul sur une base, donc $\chi_M(M) = 0$. Ainsi $\chi_M(M) = 0$ si pour toute matrice M est diagonalisable.

• Étape 3. Par densité, il existe une suite (M_n) de matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ tq $M_n \to M$, donc

$$0 = \chi_{M_n}(M_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_M(M)$$

et donc $\chi_M(M) = 0$.

Exercice R41. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall A, B \in E,\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \|AB\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall A, B \in E,\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \|AB\|_2 \le \|A\|_2\|B\|_2$.
3. Montrer que pour toute norme $\|\_\|$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe c dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall A, B \in E,\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \|AB\| \le c\|A\|\|B\|$$

$\boxed{1}$ Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$:

$$|(AB)_{ij}| \le \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}B_{kj}| \le \|A\|_\infty\|B\|_\infty \sum_{k=1}^{n} 1 \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$$

On passe ensuite au sup sur i et j dans $\{1, \dots, n\}$, on trouve :

$$\|AB\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$$

$\boxed{2}$

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(AB)_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} \right\rangle^2 \le \left\| \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Donc :

$$\|AB\|_2^2 \le \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell j}^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell j}^2\right) \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell j}^2\right) \\ &\le \|A\|_2^2\|B\|_2^2 \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ • **Méthode 1.**

En utilisant les équations précédentes. Comme on est en dimension finie, les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. Il existe donc α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \alpha\|M\|_2 \le \|M\| \le \beta\|M\|_2$$

Donc :

$$\|AB\| \le \beta\|AB\|_2 \underset{Q2}{\le} \beta\|A\|_2\|B\|_2 \le \frac{\beta}{\alpha^2}\|A\|\|B\|$$

• **Méthode 2.**

Sans utiliser les équations précédentes, considérons l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} S^2 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & A \times B \end{array}$$

avec S la sphère unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble S est borné par 1 et fermé : c'est donc un compact de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble S^2 est encore un compact. De plus, φ est continue car c'est une application bilinéaire en dimension finie.

L'application φ est donc continue sur un compact. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée. Il existe donc c dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall A, B \in S, \quad \|AB\| \leq c \qquad (1)$$

Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nuls, on a donc :

$$\frac{\|MN\|}{\|M\|\|N\|} = \left\| \frac{M}{\|M\|} \cdot \frac{N}{\|N\|} \right\| \underset{(1)}{\leq} c$$

Donc :

$$\|MN\| \leq c\|M\|\|N\|$$

Comme cette relation est vraie de manière évidente pour M ou N nuls, elle est vraie pour tout couple de matrices (M, N).

Correction des exercices de références

Exercice R42. Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer, en fonction des dérivées partielles de f :

1. la dérivée de : $g_1(x) = f(x, x^2, x^4)$,
2. les dérivées partielles de : $g_2(x,y) = f(x+2y, 3x+4y, x^2+y^2)$.

En utilisant la règle de la chaîne, on obtient :

$$g_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x^2,x^4)\times 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2,x^4)\times 2x + \frac{\partial f}{\partial z}(x,x^2,x^4)\times 4x^3$$

On pose $a = (x+2y,\ 3x+4y,\ x^2+y^2)$. Toujours avec la règle de la chaine, on obtient :

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\times 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\times 3 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\times 2x$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\times 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\times 4 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\times 2y$$

Exercice R43. Considérons l'ensemble C de $\mathbb{R}^2$ et f l'application de T dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$C = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, |x+y|\le 1,\ |x-y|\le 1 \right\} \qquad f(x,y) = (x-y)^2+(x+y)^3$$

1. Dessiner l'ensemble C de $\mathbb{R}^2$
2. Sans calcul, justifier l'existence d'un maximum global de f.
3. Déterminer le maximum global de f.

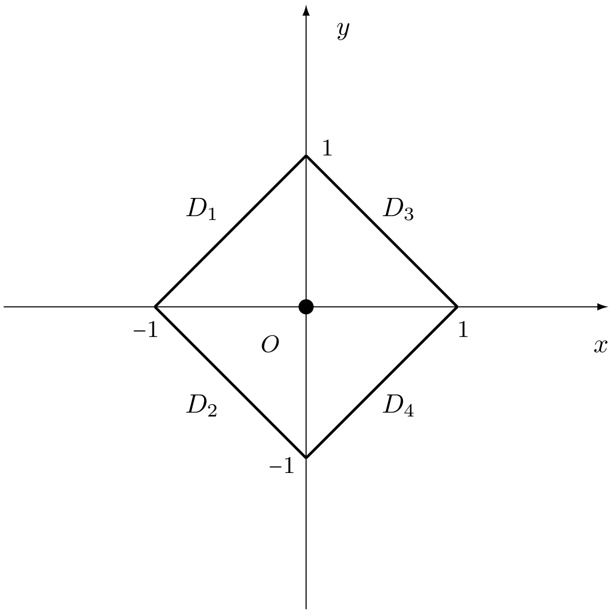
$\boxed{1}$ Tout d'abord, décrivons C.

$$\begin{cases} |x+y| \le 1 \\ |x-y| \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1-x \le y \le 1-x \\ -1+x \le y \le 1+x \end{cases}$$

Notons :

$$D_1 : y = x+1 \quad D_2 : y = -x-1 \quad D_3 : y = -x+1 \quad D_4 : y = x-1$$

L'ensemble C est donc délimité par le carré :



$\boxed{2}$ L'ensemble C est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. C'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$. Or f est continue sur C car elle est polynomiale. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f admet (au moins) un maximum global sur C.

$\boxed{3}$ Déterminons les points critiques de f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \\ -2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \\ -4(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 12x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x,y) = (0,0)$$

Ainsi, $(0,0)$ est le seul point critique de f. Déterminons la hessienne en ce point.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2+6(x+y) & -2+6(x+y) \\ -2+6(x+y) & 2+6(x+y) \end{bmatrix} \implies H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la hessienne est nul, il faut étudier la nature du point autrement.

$$f(x,-x) - f(0,0) = 4x$$

Ainsi $f(x,-x)$ change de signe au voisinage de $(0,0)$. Il n'y a donc en $(0,0)$ ni maximum, ni minimum. Le maximum se trouve donc sur le bord de C.

- Sur $D_1 \cap C$ avec $D_1 : y = x+1$ et $x \in [-1,0]$:

$$f(x,y) = f(x,2x+1) = (-1)^2 + (2x+1)^3$$

Ainsi f admet un maximum en $(0,1)$ de valeur 2.

- Sur $D_2 \cap C$ avec $D_2 : y = x-1$ et $x \in [0,1]$:

$$f(x,y) = f(x,x-1) = 1^2 + (2x-1)^3$$

Ainsi f admet un maximum en $(1,0)$ de valeur 2.

- Sur $D_3 \cap C$ avec $D_3 : y = -x+1$ et $x \in [0,1]$:

$$f(x,y) = f(x,-x+1) = (2x-1)^2 + 1^3$$

Ainsi f admet un maximum en $(0,1)$ et $(1,0)$ de valeur 2.

- Sur $D_4 \cap C$ avec $D_4 : y = -x - 1$ et $x \in [-1,0]$:

$$f(x,y) = f(x,-x-1) = (2x+1)^2 + (-1)^3$$

Ainsi f admet un maximum en $(0,-1)$ et $(-1,0)$ de valeur 2.

Conclusion. Le fonction f admet 2 maximums globaux sur C en $(1,0)$ et $(0,1)$ de valeur 2.

Exercice R44. Posons

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\left(\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)^3}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f n'est pas C^1 en $(0,0)$.

$\boxed{1}$ Montrons que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$

$$\left|f(x,y) - 0\right| = \left|\frac{x^2}{\left(\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)^3}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\left(\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)^3} = \|(x,y)\|_2^{\frac{1}{2}}$$

Comme $\|(x,y)\|_2$ tend vers 0 en $(0,0)$, on peut conclure d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

On peut donc prolonger f en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.

$\boxed{2}$ Montrons que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$. Comme :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\left(\sqrt[4]{x^2}\right)^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

la dérivée partielle de f par rapport à x n'existe pas en $(0,0)$. La fonction f n'est donc pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice R45. Déterminer les fonctions f de $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, vérifiant :

$$y\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) - x\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = 0$$

On pourra dans un premier temps passer en coordonnées polaires.

Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Notons de plus g la fonction :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x,y)$$

En utilisant la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \ + \ r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&= -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ + \ x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, g ne dépend que de r. Il existe une fonction φ de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$g(r,\theta) = \varphi(r)$$

En revenant à f, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \ = \ \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \ = \ \psi(x^2+y^2)$$

avec $\Psi(x) = \varphi(\sqrt{x})$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$. Ainsi l'ensemble solution est :

$$S \ = \ \left\{f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \ / \ \exists \psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \psi\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

Chap. 14

Équations différentielles

PSI

Correction des exercices de références

Exercice R46. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z + e^t \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$$

$\boxed{1}$ Posons :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système différentiel peut se mettre sous la forme :

$$X' = AX + B$$

- **Étape 1.** Déterminons le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 1 & 2 \\ -2 & x-1 & 2 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Effectuons l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_2 - L_1$:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 1 & 2 \\ -2 & x-1 & 2 \\ -x+1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Puis les opérations élémentaires suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1$$

On a donc :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & x-3 & x-2 \\ -2 & x-3 & 0 \\ -x+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant sur la dernière ligne :

$$\chi_A(x) = -(x-1)\begin{vmatrix} x-3 & x-2 \\ x-3 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

- **Étape 2.** </B> Diagonalisons A. On détermine les espaces propres associés :

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E_2 &= \ker\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E_3 &= \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A = PDP^{-1}$$

• **Étape 3.** Changement de variable dans le système. Posons $Y = P^{-1}X$. Comme P est constant, on a $Y' = P^{-1}X'$. Ainsi :

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}\left(PDP^{-1}\right)X + P^{-1}B = DY + P^{-1}B$$

Après calcul :

$$P^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Posons :

$$Y = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

Le système différentiel est donc équivalent au système :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - e^t \\ v'(t) = 2v(t) + e^t \\ w'(t) = 3w(t) + e^t \end{cases}$$

• **Étape 4.** Résolution des EDL. Dans l'EDL numéro 1, on cherche une solution particulière sous la forme λte^t. Dans les EDL numéro 2 et 3, on cherche une solution particulière de la forme λe^t. On trouve :

$$\begin{cases} u(t) = Ae^t - te^t \\ v(t) = Be^{2t} - e^t \\ w(t) = Ce^{3t} - \frac{1}{2}e^t \end{cases}$$

• **Étape 5.** On revient aux variables initiales.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(Ae^t - te^t\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(Be^{2t} - e^t\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(Ce^{3t} - \frac{1}{2}e^t\right)$$

$\boxed{2}$ On pose

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit :

$$X'(t) = AX(t)$$

• **Étape 1.** Polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, on trouve :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

Enfin, on trouve :

$$\chi_A(x) \;=\; \left((x-1)^2+1\right)(x+2) \;=\; (x-1-i)(x-1+i)(x-2)$$

Les valeurs propres sont donc $1+i$, $1-i$ et 2.

• **Étape 2.** Diagonalisons A. Les espaces propres associés aux valeurs propres trouvées dans l'étape 1 sont :

$$E_2 \;=\; \ker(2I-A) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$E_{1+i} \;=\; \ker\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2i & i \end{pmatrix} \;=\; \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Ainsi, sans calcul :

$$E_{1-i} \;=\; \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
En posant :

$$D \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$.

• **Étape 3.** Changement de variable.
On pose $Y = P^{-1}X$. Comme P est constant, on a $Y' = P^{-1}X'$ et :

$$Y' \;=\; P^{-1}X' \;=\; P^{-1}AX \;=\; P^{-1}PDP^{-1}X = DY$$

En posant :

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

le système différentiel devient :

$$\begin{cases} u' &= 2u \\ v' &= (1+i)v \\ w' &= (1-i)w \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} u(t) &= Ae^{2t} \\ v(t) &= Be^{(1+i)t} \\ w(t) &= Ce^{(1-i)t} \end{cases} \quad \text{avec } A, B, C \in \mathbb{C}$$

• **Étape 4.** On revient aux variables initiales.

$$X \;=\; PY \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} Ae^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} Be^{(1+i)t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix} Ce^{(1-i)t}$$

Pour trouver les solutions réelles, il suffit de prendre la partie réelle. En posant :

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2, \quad C = C_1 + iC_2 \quad \text{avec } A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

on trouve :

$\boxed{3}$

Exercice R47. Soit $xy' - 2y = 2$ une équation différentielle.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$
2. Peut-on "recoller" des solutions de $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ pour en faire des solutions sur $\mathbb{R}$?
3. Rappeler le théorème de Cauchy donnant la dimension de l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène. Quelle est la dimension ici de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène ?

$\boxed{1}$ Résolvons l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$y' = \frac{2}{x}y + \frac{2}{x}$$

On remarque que $y = -1$ est solution, on trouve donc les solutions sont de la forme :

$$y(t) = Ae^{2\ln|x|} - 1 = Ax^2 - 1$$

avec A dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Soit :

$$\begin{cases} y_-(x) = Ax^2 - 1 \\ y_+(x) = Bx^2 - 1 \end{cases}$$

des solutions respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. On remarque que :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} y_-(x) = \lim_{x\to 0^+} y_+(x) = -1 \\ \lim_{x\to 0^-} y_-'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_+'(x) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les :

$$y(x) = \begin{cases} Ax^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ Bx^2 - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Tout d'abord, notons :

$$f_{A,B}(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{si } x > 0 \\ Bx^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions homogènes est alors

$$S_H = \left\{ f_{A,B} \,/\, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est une $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. Le théorème de Cauchy précise que l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène d'une équation différentielle linéaire <u>résolue</u> d'ordre 1 est de dimension 1. Ici, l'équation différentielle n'est pas résolue sur $\mathbb{R}$. Il peut donc avoir une dimension différente de 1.

Exercice R48. Discuter des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 3y = e^{mx}$ suivant les valeurs de m.

Résolvons l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 3y = e^{mx}$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

- **Étape 1 :** Équation homogène.
  L'équation caractéristique associée est :

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

- **Étape 2 :** Solution particulière si $m \notin \{-3, -1\}$.

Comme m n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda e^{mx}$$

On a donc :

$$y_p'' + 4y_p' + 3y_p = e^{mx}$$

ce qui donne :

$$(\lambda m^2 + 4\lambda m + 3\lambda)e^{mx} = e^{mx}$$

D'où :

$$\lambda = \frac{1}{m^2 + 4m + 3}$$

Comme $m^2 + 4m + 3 \neq 0$ (car $m \notin \{-1, -3\}$), la solution particulière est :

$$y_p(x) = \frac{1}{m^2 + 4m + 3} e^{mx}$$

- **Étape 3 :** Solution particulière si $m \in \{-3, -1\}$.
  Cette fois, m est une racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda x e^{mx}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} y_p &= \lambda x e^{mx} \\ y_p' &= \lambda e^{mx} + \lambda m x e^{mx} \\ y_p'' &= 2\lambda m e^{mx} + \lambda m^2 x e^{mx} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation :

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' + 3y_p &= e^{mx} \\ \left(2\lambda m + \lambda m^2 x + 4\lambda + 4\lambda m x + 3\lambda x\right) e^{mx} &= e^{mx} \end{aligned}$$

On regroupe :

$$\lambda \left[x(m^2 + 4m + 3) + (2m + 4) \right] = 1$$

Or $m^2 + 4m + 3 = 0$ car $m \in \{-1, -3\}$, et $2m + 4 \neq 0$. Donc :

$$\lambda = \frac{1}{2m + 4}$$

Ainsi :

$$y_p(x) = \frac{x}{2m + 4} e^{mx}$$

- **Étape 4 :** Conclusion.
  Les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y(x)=\begin{cases} Ae^{-x}+Be^{-3x}+\dfrac{1}{m^2+4m+3}e^{mx} & \text{si } m\notin\{-1,-3\} \\ Ae^{-x}+Be^{-3x}+\dfrac{x}{2m+4}e^{mx} & \text{si } m\in\{-1,-3\} \end{cases}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Exercice R49.

1. Résoudre $ty''=-y'$ et déterminer la dimension de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Pourquoi la dimension n'est pas 2 comme l'affirme le théorème de Cauchy-linéaire ?

$\boxed{1}$ • Etape 1. Tout d'abord, résolvons l'équation différentielle :

$$ty'' = -y'$$

sur $I=\mathbb{R}_+^*$ ou sur $I=\mathbb{R}_-^*$. Ainsi l'équation différentielle est équivalente à :

$$y'' = -\frac{1}{t}y'$$

Donc :

$$y' = Ae^{-\ln|t|} = \frac{A}{|t|}$$

avec A dans $\mathbb{R}$. Or, sur I, t a un signe constant. Donc :

$$y'(t) = \frac{B}{t}$$

avec $B=\pm A\in\mathbb{R}$. Soit encore :

$$y(t) = B\ln|t|+C$$

avec B, C dans $\mathbb{R}$.

• Etape 2. Déterminons les solutions sur $\mathbb{R}$. Soit :

$$\begin{cases} y_+(t) = B_+\ln|t|+C_+ \\ y_-(t) = B_-\ln|t|+C_- \end{cases}$$

des solutions respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Pour recoller ces solutions, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to0^-} y_-(t) = \lim\limits_{t\to0^+} y_+(t) \in \mathbb{R} \quad (1) \\ \lim\limits_{t\to0^-} y'_-(t) = \lim\limits_{t\to0^+} y'_+(t) \in \mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) donne :

$$\lim_{t\to0^-} B_-\ln|t|+C_- = \lim_{t\to0^+} B_+\ln|t|+C_+\in\mathbb{R}$$

Donc :

$$B_-=B_+=0 \quad \text{et} \quad C_+=C_-$$

Dans ces conditions, l'équation (2) est vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel contenant les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel de dimension 1.

$\boxed{2}$ Le théorème de Cauchy est vrai pour les équations différentielles linéaires résolues. Ici, cette équation différentielle n'est pas résolue. Donc la dimension peut être différente de 2.

Par contre, on peut remarquer que sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation différentielle est résolue et l'ensemble des solutions est bien un espace vectoriel de dimension 2.