Intégrales à paramètres.

Exercices de référence

Exercice R1.

Déterminer la limite des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \qquad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}dt$$

Exercice R2.

Soit f la fonction :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}dt$$

1. Quelle est le domaine de définition de F ?
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis calculer F'.
3. En déduire la valeur de $F(x)$.

Exercice R3.

En faisant apparaitre une série géométrique, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice R4.

La fonction gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est dérivable et calculer sa dérivée.

Intégrales à paramètres.

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

Soit f une application continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de limite l. Posons :

$$c_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$$

Montrer que $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice C2.

Soit f une application de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(0)=0$. Notons g la fonction $\frac{f(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0.

1. Que vaut $g(0)$? Montrer que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[-1;1]$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xt)dt$
3. Montrer que g est C^∞ sur $[-1;1]$, puis sur $\mathbb{R}$.

Niveau 2

Exercice C3.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Exercice C4.

Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
2. Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Posons $g(x) = F(x^2)$. Calculer g' puis en déduire que :

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2 dt}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice C5.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ à l'aide des intégrales de Wallis. On rappelle la définition des intégrales de Wallis, ainsi qu'un équivalent :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \qquad\qquad W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Pour cela considérons l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

1. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I$.
2. Montrer que $I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$. En déduire la valeur de I

Niveau 3

Exercice C6.

La fonction gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

On notera $f(x,t) = e^{-t} t^{x-1}$

1. Montrer que, pout tout p de $\mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \ln^p(t) e^{-t} t^{x-1} dt$$

   est absolument convergente pour x dans $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in]0;+\infty[,\quad t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$$

3. Montrer que Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $\Gamma^{(p)}$ pour p dans $\mathbb{N}$?
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que la fonction Γ prolonge la factorielle c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$$

5. Montrer que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Tracer la courbe.

Intégrales à paramètres.

Exercices

" Plutôt que de maudire l'obscurité gratte une allumette "

T. Pratchett

Niveau 1

Exercice 1.

Déterminer la limite des intégrales suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + x^n}dx$
3. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x^2)}dx$
4. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx$
5. $I_n = \displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^n dx$
6. $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x)dx$

Exercice 2.

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)dt$$

Exercice 3.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

Montrer que (u_n) est bien définie et que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

Exercice 4.

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

Exercice 5.

Pour chacune des fonctions F définies par une intégrale suivantes, vous montrerez que F est bien définie sur l'intervalle I et vous indiquerez la méthode utilisée pour montrer la convergence de l'intégrale : méthode du t^α, faussement impropre, th. de comparaison avec ~,...De plus vous donnerez une fonction g majorant $\left|\frac{\delta f}{\delta x}(x,t)\right|$ permettant d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale. On prendra x dans un segment $[a,b]$ de I et on notera A, s'il existe, un réel vérifiant $[a,b] \subset [-A,A]$. Pour la définition de g, on ne se servira de a, b et A que si c'est strictement nécessaire.

Fonction	Domaine de définition et convergence	Majoration de la dérivée partielle.
$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$	$I = \mathbb{R}^+$ Cvg 0 : Cvg $+\infty$:	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} dt$	$I =]-1;+\infty[$ Cvg 0 : Cvg $+\infty$:	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$	$I = \mathbb{R}_+^*$ Cvg 0 : Cvg $+\infty$:	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{1} \frac{t^x}{1+t} dt$	$I =]0;+\infty[$ Cvg 0 : Cvg 1 :	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{x(1+t^2)} dt$	$I = \mathbb{R}_+^*$ Cvg 0 : Cvg $+\infty$:	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t+x} dt$	$I =]0;+\infty[$ Cvg 0 : Cvg 1 :	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{1} \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)} dt$	$I = [0;+\infty[$ Cvg 0 : Cvg 1 :	$g(t) =$
$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$	$I = \mathbb{R}_+^*$ Cvg 0 : Cvg $+\infty$:	$g(t) =$

Niveau 2

Exercice 6.

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}dt = -\frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 7.

Considérons la suite d'intégrales définies par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$$

Montrer que

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

Exercice 8.

Partie I. Théorème de convergence monotone

Soient f et f_n dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ intégrables pour tout n de $\mathbb{N}$. Supposons de plus que (f_n) est croissante et converge simplement vers f.

1. Posons $g_n = f_n - f_0$. Montrer que g_n est intégrable et converge vers une fonction intégrable.
2. En utilisant le théorème de convergence dominée sur (g_n), montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f \qquad (P)$$

   C'est le théorème de convergence monotone.
3. Montrer que si (f_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on peut se passer de l'hypothèse f_n intégrables.

Comme le théorème de convergence dominée est admis, on peut voir le théorème de convergence monotone comme une conséquence du théorème de convergence dominée. En réalité, il est utilisé dans la preuve du théorème de convergence dominée. . .

Partie II. Une application

Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0,n[\\ 0 & \text{si} \quad x \in [n,+\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) est croissante.
2. Montrer que (f_n) converge simplement.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ en utilisant le théorème de convergence monotone.
4. Redémontrer le résultat en utilisant uniquement le théorème de convergence dominée.

Exercice 9.

On considère la fonction suivante

$$W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)dt$$

1. Déterminer le domaine de définition D de W.
2. Montrer que W est C^∞ sur D.
3. Calculer $W(0)$, $W(1)$, $W(2)$, $W(3)$.
4. Trouver une relation simple entre $W(x)$ et $W(x+2)$.
5. Déterminer $W(n)$ pour tout entier naturel n.
6. Déterminer des équivalents simples de W au bornes de D.

Niveau 3

Exercice 10.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$. Pour cela, on va calculer de deux manières, l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx$$

1. Montrer que le théorème de convergence dominée est encore vrai pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
2. Soit θ dans $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que :
$$Re\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) = -\ln\left|2\sin\tfrac{\theta}{2}\right|$$
3. Posons
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)\theta}x^k$$
Montrer que (S_n) converge simplement vers une fonction S que l'on déterminera.
4. On peut vérifier aisément que les hypothèses d'intégration terme à terme sur $[0,1]$ ne sont pas réunies. On va donc utiliser directement le théorème de convergence dominée. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a :
$$|S_n(x)| \leq \frac{2}{|1-xe^{i\theta}|}$$
En déduire que :
$$\int_0^1 S(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(k+1)\theta}x^k dx$$
5. Enfin, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left|2\sin\tfrac{\theta}{2}\right|$$

Exercice 11.

On considère les fonctions f et g définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \qquad\qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}dt$$

Partie I. Étude de f.

1. Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y'' + y = \frac{1}{x}$
3. Montrer que f est continue en 0.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Partie II. Étude de g.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $g(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t+x)^2} dt$
2. Montrer que g est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : $y'' + y = \frac{1}{x}$
4. Montrer que g est continue en 0. On pourra étudier la limite de $g(x) - g(0)$ en 0.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g''(x) = 0$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Partie III. Comparaison de f et g.

1. De quelle équation différentielle l'application $f - g$ est-elle solution sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. En déduire que $f = g$, puis que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$