Espaces préhilbertiens

Exercices de référence

Exercice R1.

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la définition d'un produit scalaire puis rappeler les deux formes du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Utiliser l'algorithme de Gramm-Schmidt pour transformer la famille (A, B, C) en une famille (A', B', C') orthonormale.
3. On note $F = \text{Vect}(A, B, C)$ et on admet que la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$
est dans F. Déterminer les coordonnées de M dans la base (A', B', C') de F
4. Déterminer enfin la matrice de la projection sur F dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Exercice R2.

Pour des polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note :

$$\langle P, Q \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente converge pour tous polynômes P et Q.
2. Montrer que $\langle , \rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}[X]$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons T_n le n^e^polynôme de Tchebitchev, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice R3.

Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les espaces vectoriels formés respectivement par les matrices symétriques et par les matrices anti-symétriques de taille n.

1. Rappeler le théorème de projection dans un espace préhilbertien.
2. Montrer que $(A/B) = \text{tr}\left(A^T.B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note
$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \underset{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \|A - B\| \;=\; \underset{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{Inf} \sqrt{(A - B/A - B)}$$
Justifier l'existence de $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
5. montrer que :
$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \left\| \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \right\|$$

Espaces préhilbertiens

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

1. Montrer que la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est une norme euclidienne. Déterminer le produit scalaire associé.
2. Montrer que le module sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ est une norme euclidienne. Déterminer le produit scalaire associé.

Exercice C2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Notons pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout p de $[1;+\infty[$. :

$$\|x\|_p \;=\; \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots |x_n|^p} \qquad\qquad \|x\|_\infty \;=\; \underset{i\in[[1,n]]}{\mathrm{Max}} |x_i|$$

On admet que ce sont des normes.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p \;=\; \|x\|_\infty$$
2. Montrer que la norme $\| \ \|_p$ avec p dans $[1;+\infty]$ est euclidienne si et seulement si $p = 2$.

Exercice C3.

1. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.
2. Montrer que la base des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{ij}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$.

Exercice C4.

1. Montrer que :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;=\; S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R})$$
2. Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$C^0([-a,a],\mathbb{R}) \;=\; \mathcal{P}([-a;a],\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{I}([-a;a],\mathbb{R})$$
avec $\mathcal{P}([-a;a],\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}([-a;a],\mathbb{R})$ les $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues paires et impaires de $[-a;a]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice C5.

Montrer que :

$$H = \left\{ M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \, / \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} = 0 \right\}$$

est un hyperplan. Déterminer un vecteur normal.

Exercice C6.

Soient $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ et p la projection orthogonale sur F le sev des fonctions paires de E.

1. Justifier l'existence de p.
2. Déterminer l'image par p de la fonction exponentielle.

Exercice C7.

Notons

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sev $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathcal{A}$
3. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur A dans $\beta = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Exercice C8.

Soit $F : x + 2y + z = 0$ un plan de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'image de (x, y, z) par p la projection orthogonale sur F
2. En déduire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice C9.

Soit

$$\begin{cases} u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (1,0,1) \\ u_3 = (1,1,0) \end{cases}$$

Effectuer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Scmidt, afin de transformer cette famille libre en base orthonormale.

Exercice C10.

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P/Q) \;=\; \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une base othogonale de polynômes unitaires à partir de la famille $\left(1, X, X^2\right)$.

Niveau 2

Exercice C11.

Pour des polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente converge pour tous polynômes P et Q.
2. Montrer que $\langle , \rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}[X]$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons T_n le n$^{\text{e}}$polynôme de Tchebitchev, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice C12.

Notons $E = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que $<,>$ est un pse sur E.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons c_n et s_n les applications définies par $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$. Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$ que la famille suivante est orthogonale :

$$(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_0, s_1, \ldots, s_n)$$

3. Expliquer pourquoi cette famille n'est pas libre. Quelle sous famille faut-il prendre pour qu'elle soit libre ?

Exercice C13.

Soit p une projection d'un espace pré-hilbertien réel. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E, \ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Pour la réciproque, on pourra raisonner par contraposée. Pour une projection sur F de direction G, on pourra prendre λ dans $\mathbb{R}$ et (x, y) dans $F \times G$ non orthogonaux et développer l'expression : $\|\lambda x + y\|^2 - \|p(\lambda x + y)\|^2$

Niveau 3

Exercice C14.

On identifie polynôme et fonction polynôme, on peut donc supposer $\mathbb{R}[X]$ sev de $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

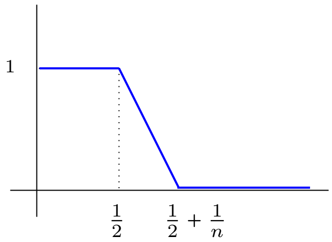
1. En utilisant que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes, montrer que

$$\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$$

2. En déduire que l'on peut trouver F sev d'un $\mathbb{R}$-ev E tels que $E \neq F \oplus F^\perp$.
3. En déduire que l'on peut trouver F sev d'un $\mathbb{R}$-ev E tels que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Exercice C15.

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel. Considérons pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'application f_n de E définie par :



1. Montrer que pour tous p et q dans $\mathbb{N}$ avec $p > q$, on a : $\|f_p - f_q\| \leq \frac{1}{q}$.
2. En déduire que (f_n) est une suite de Cauchy.
3. Montrer que si (f_n) converge vers f alors f vaut 1 sur $[0; \frac{1}{2}]$ et f vaut 0 sur tout intervalle de la forme $[a, 1]$ avec $a > \frac{1}{2}$
4. En déduire que (f_n) ne converge pas dans E.

Exercice C16.

1. Déterminer la distance entre un vecteur $\overrightarrow{u}(3, 4, 5)$ de $\mathbb{R}^3$ et le plan $F : x + 2y + z = 0$.
2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la meilleure approximation pour la norme euclidienne usuelle de A par une matrice symétrique.
3. Déterminer : $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (\sin(x) - ax - b)^2 dx$.

Exercice C17.

I. **L'inégalité de Bessel.** Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace pré-hilbertien réel.

1. Notons p_n la projection orthogonale sur $F_n = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$. Exprimer $\|p_n(x)\|^2$ à l'aide de x, des e_i et du produit scalaire.
2. En déduire que la série $\sum \langle x, e_n \rangle^2$ est convergente pour tout x de E et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

C'est l'inégalité de Bessel.

II. **Lemme de Lebesgues.** Soient f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Lebesgues qui affirme que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt) = 0 \qquad (*)$$

1. Soit p est q des entiers tels que $2p\pi < a < b < 2q\pi$. Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([2p\pi, 2q\pi], \mathbb{R})$, on choisit le produit scalaire :

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g \rangle = \frac{1}{2(q-p)\pi} \int_{2p\pi}^{2q\pi} f(t)g(t)dt$$

De plus notons c_n l'élément de E définie par $c_n(x) = \cos(nx)$. Montrer que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E. Que vaut $\|c_n\|$?

2. On prolonge f par 0 pour en faire un élément de E. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bessel, que l'équation $(*)$ est vérifiée. On pourra remarquer que le résultat reste vrai si f est continue par morceaux. On aura alors un semi-produit scalaire, mais la démonstration restera la même.

Espaces préhilbertiens

Exercices

" Le champignon le plus vénéneux, c'est celui qu'on trouve dans les voitures."

Coluche

Niveau 1

Exercice 1.

Montrer que :

$$(f/g) \;=\; f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit n dans $\mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Considérons l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(P/Q) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$$

1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire.
2. Calculer (X^p, X^q) pour tout p et q de $\mathbb{N}$.
3. En déduire une base orthonormée de $(E,(./.))$.

Exercice 3.

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Montrer que la norme est continue.
2. Notons :
$$\forall x,y \in E,\; N(x,y) \;=\; \|x\| + \|y\|$$
Montrer que N est une norme sur E^2.
3. Montrer que le produit scalaire est continue pour cette norme N.

Exercice 4.

Pour tout P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$(P/Q) \;=\; \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

2. Calculer (X^p/X^q) pour tous p et q de $\mathbb{N}$.
3. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 5.

Soient $(E, (\,/\,))$ un espace pré-hilbertien réel et $\|\,.\!.\,\|$ la norme euclidienne associées.

1. Soit f et g des endomorphismes de E Montrer que :

$$\forall x, y \in E,\ (f(x)/f(y)) \ = \ (g(x)/g(y)) \iff \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$$

2. En déduire qu'un endomorphisme de E conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
3. Montrer que ce résultat est faux si on considère une application quelconque de E dans E.

Niveau 2

Exercice 6.

Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs de l'espace formant entre eux des angles supérieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 7.

Soit θ dans $]0, \pi[$. Pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on pose :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \ = \ xx' + yy' + (xy' + x'y)\cos(\theta)$$

1. Montrer que $\langle .., .. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. On définit f l'endomorphisme par sa matrice base la base canonique (e_1, e_2) :

$$A \ = \ [f]_c \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   Montrer que f est un endomorphisme orthogonal pour ce produit scalaire. Pourquoi la matrice A n'est-elle pas orthogonale ?
3. Déterminer un vecteur e de $\mathbb{R}^2$ pour que la base (e_1, e) soit une BON directe.
4. Déterminer la matrice B de f dans la base (e_1, e), puis reconnaitre la nature de f.

Exercice 8.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_0^1 Q(t)P(t)dt$$

2. Montrer que Q est de degré n.

3. Montrer qu'il n'existe pas un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \int_0^1 Q(t)P(t)dt$$

Exercice 9.

On définit les polynômes de Legendre par :

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

où la puissance (n) désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$. Posons

$$(P/Q) \;=\; \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et pour tout k de $\mathbb{N}$: $P_k = (X^2-1)^k$.

1. Montrer que $(.,.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer L_0, L_1 et L_2 et montrer que L_n est de degré n. Que vaut $P_n^{(2n)}$?
3. Montrer que si $p < q$ alors 1 et -1 sont racines de $P_q^{(p)}$.
4. Soient m et n dans $\mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\quad \int_{-1}^1 P_n^{(n)}P_m^{(m)} = (-1)^k\int_{-1}^1 P_n^{(n-k)}P_m^{(m+k)}$$

5. En déduire que si $m \neq n$ alors $(L_m/L_n) = 0$.

Exercice 10.

I. **L'inégalité de Bessel.** Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace pré-hilbertien réel.
   1. Notons p_n la projection orthogonale sur $F_n = \text{vect}(e_1,\dots,e_n)$. Exprimer $\|p_n(x)\|^2$ à l'aide de x, des e_i et du produit scalaire.
   2. En déduire que la série $\sum\langle x,e_n\rangle^2$ est convergente pour tout x de E et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle^2 \;\leq\; \|x\|^2$$

   C'est l'inégalité de Bessel.

II. **Lemme de Lebesgues.** Soient f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Lebesgues qui affirme que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt) \;=\; 0 \qquad\qquad (*)$$

   1. Soit p est q des entiers tels que $2p\pi < a < b < 2q\pi$. Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([2p\pi,2q\pi],\mathbb{R})$, on choisit le produit scalaire :

$$\forall f,g \in E,\ \langle f,g\rangle \;=\; \frac{1}{2(q-p)\pi}\int_{2p\pi}^{2q\pi} f(t)g(t)dt$$

   De plus notons c_n l'élément de E définie par $c_n(x) = \cos(nx)$. Montrer que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E. Que vaut $\|c_n\|$?
   2. On prolonge f par 0 pour en faire un élément de E. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bessel, que l'équation $(*)$ est vérifiée. On pourra remarquer que le résultat reste vrai si f est continue par morceaux. On aura alors un semi-produit scalaire, mais la démonstration restera la même.

Niveau 3

Exercice 11.

Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert réel c'est-à-dire un pré-hilbertien réel dans lequel les suites de Cauchy sont convergentes. On pourra utiliser sans démonstration le théorème de projection sur un fermé convexe C affirmant qu'il existe un unique vecteur $p_C(x)$ vérifiant : $d(x, C) = \|x - p_C(x)\|$. Il est l'unique solution de l'équation en y_0 :

$$\forall y \in C,\ (x - y_0 / y - y_0) \leq 0$$

Partie I. Supplémentaire orthogonal d'un fermé. Soit F un sev fermé de H. Pour tout x de H, notons $p(x)$ la projection de x sur le convexe fermé F.

1. Montrer que :
$$\forall x \in H,\ \forall y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \langle x - p(x), y \rangle \leq 0$$
2. En déduire que : $x - p_F(x) \perp F$.
3. Montrer que $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et que $p(x)$ coïncide avec la projection orthogonale de x sur F.

Partie II. Théorème de Riesz. Soit f une forme linéaire continue non nulle de H.

1. On rappelle qu'un hyperplan en dimension infinie est un sous-espace vectoriel ayant une droite vectorielle comme supplémentaire. Montrer que $Ker(f)$ est un hyperplan.
2. Montrer que $Ker(f)$ est fermé.
3. Montrer qu'il existe a non nul dans H vérifiant $a \perp Ker(f)$ et $f(a) = \|a\|^2$
4. Montrer que : $\forall x \in E,\ f(x) = (a/x)$

Exercice 12.

Nous travaillerons dans cet exercice dans un espace de Hilbert $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ au lieu d'un préhilbertien réel, uniquement pour que le théorème de représentation de Riesz s'applique également aux formes linéaires continues. On pourra bien sûr utiliser ce résultat sans démonstration.

Notons $\|..\|$ la norme euclidienne et E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E. On définit la convergence faible comme le type de convergence minimum pour garder la continuité des formes linaires continues et la convergence forte comme la convergence (classique) en norme. En d'autres termes, pour une suite (x_n) de E :

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Faible}} x & \Longleftrightarrow & \forall l \in E',\ l(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l(x) \\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Forte}} x & \Longleftrightarrow & x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|..\|} x \end{cases}$$

Partie I. Résultats généraux.

1. Rappeler et montrer le théorème de représentation de Riesz dans un eve. On admet que ce théorème reste vrai pour les formes linéaires continues dans un espace de Hilbert.
2. En déduire que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si :
$$\forall a \in E,\ \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, a \rangle = \langle x, a \rangle$$
3. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.

Partie II. Le cas de la dimension finie. On suppose dans cette partie E de dimension finie.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E et x dans E. Donner et montrer une relation entre les (x/e_i) et $\|x\|$.
2. En déduire que les deux modes de convergence sont identiques.

Partie III. Un contre-exemple en dimension infinie.

1. Montrer l'existence d'une FON $(e_1, e_2, \ldots)$ infinie de E.
2. Montrer que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle^2$ est convergente pour tout x de E.
3. Montrer que (e_n) est une suite qui converge faiblement mais pas fortement. En déduire que ces deux modes de convergence coïncident uniquement en dimension finie.