Suites et séries de fonctions

Exercices de référence

Exercice R1.

Déterminer si les propriétés suivantes sont conservées par CS, CUS ou par CU.

	Propriété conservée par	CS	CUS	CU
1.	Positivité			
2.	Injectivité			
3.	Surjectivité			
4.	Continuité			
5.	Dérivabilité			
6.	Être bornée			
7.	Être uniformément bornée (*)			
8.	Être lipschitzienne			
9.	Être λ-lipschitzienne			
10.	Être une application linéaire			
11.	Être un polynôme sur un segment			
12.	Être un polynôme sur $\mathbb{R}$			

(*) bornée de manière uniforme signifie qu'il existe un M qui borne tous les f_n, c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq M$

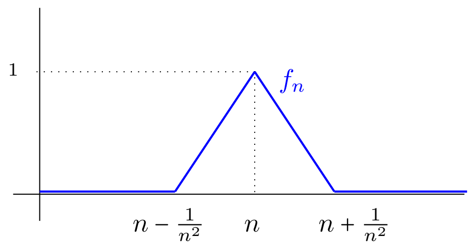
Exercice R2.

Étudier le mode de convergence des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$
3. $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -x + \frac{2}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}; +\infty[\end{cases}$
4. $f_n = xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice R3.

Considérons f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ définie par le graphe suivant :



1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement. On ne cherchera pas à exprimer sa limite f.
2. Montrer qu'il n'y a pas CU.
3. Montrer que f est intégrable et pourtant $f(x)$ ne tend pas ver 0 en $+\infty$.

Suites et séries de fonctions

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ 2. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$ 3. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$
4. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{e^{nx}}$ sur $\mathbb{R}^+$ 5. $f_n(x) = \dfrac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)}$ sur $[-2;2]$

Exercice C2.

Étudier les séries de fonctions de terme général f_n définie par :

1. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^k}{x+k}$ sur $\mathbb{R}^+$ 2. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$ 4. $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$ sur $]0,+\infty[$

Exercice C3.

Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que (f_n^2) ne converge pas uniformément vers f^2 sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de suites de fonctions qui convergent uniformément, ne converge **pas** uniformément en général.

Exercice C4.

Soit (f_n) une suite d'applications bornées qui converge simplement vers f.

1. Montrer que f peut ne pas être bornée.
2. Montrer que s'il existe une même constante M qui majore tous les f_n, alors f est bornée
3. Montrer que si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ alors f est bornée.

Exercice C5.

Posons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers une application f que l'on déterminera.
2. En déduire que la dérivabilité n'est pas conservée par CS/CU/CUS

Exercice C6.

Montrer que la fonction :

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{4^n}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer f'.

Exercice C7.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \;=\; \ln(2)$$

1. En utilisant le théorème de la double limite et que sur $[0, 1[$:

$$\ln(1 + x) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

2. Sans utiliser le théorème de la double limite et en intégrant la somme $\sum_{k=0}^{n} (-x)^k$.

Niveau 2

Exercice C8.

Soit (P_n) une suite de polynômes définis sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si l'on n'a que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $\mathbb{R}$, on peut très bien avoir f non polynôme.
2. Montrer que si $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $\mathbb{R}$ alors f est un polynôme.

   Indice : on pourra montrer qu'à partir d'un certain rang N, $P_n - P_N \in \mathbb{R}$.
3. Supposons à présent $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ et que la suite de polynômes soit une suite de $\mathbb{R}_m[X]$ avec m dans $\mathbb{N}$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice C9.

Soient n dans $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et f_n, g_n les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x - \frac{1}{n} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad\qquad g_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(x)$$

1. Tracer les fonctions f_n et g_n. Sont-elles injectives ? Surjectives ?
2. Montrer que f_n et g_n convergent uniformément vers des fonctions f et g que l'on précisera. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
3. En déduire l'injectivité et la surjectivité ne sont pas conservées par CS ou CU.

Exercice C10.

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + k^2}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis qu'elle est continue.
2. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\pi^2}{6}x + o(x)$.
3. En utilisant le théorème de comparaison série-intégrale, montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice C11.

1. Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale suivante est convergente, puis la calculer :

$$I_{pn} = \int_0^1 x^p \ln^n(x)dx$$

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, notons f_n l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln^n(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note également $f_0 = 1$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application f_n est continue et bornée par 1.

3. Pour tout x de $[0,1]$, notons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n f_n(x)}{n!}$$

Montrer que la convergence définissant f est uniforme.

4. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Exercice C12.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \int_a^b f(t)P(t)dt = 0$$

1. Montrer en utilisant le théorème de Bernstein que : $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$.
2. En déduire que $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$ dans l'espace pré-hilbertien $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Niveau 3

Exercice C13.

Notons ζ la fonction de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que ζ est continue sur I.
2. Montrer que pour tout p de $\mathbb{N}$, la série $\sum \frac{\ln^p(n)}{n^x}$ converge uniformément sur tout segment de I.
3. Montrer que ζ est C^∞ sur I. Que vaut $\zeta^{(p)}$ pour p dans $\mathbb{N}$?
4. Montrer à l'aide du théorème de la double limite que :

$$\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$$

Suites et séries de fonctions

Exercices

" *L'ennui dans ce monde c'est que les idiots sont sûrs d'eux et les gens sensés pleins de doutes.* "

B. Russel

Niveau 1

Exercice 1.

Étudier le type de convergence des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = x^n \ln(x)$ sur $]0,1]$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ sur $[0,+\infty[$
3. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ sur $]0;+\infty[$
4. $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ sur $[0,1[$
5. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+(nx)^2}$ sur $\mathbb{R}^+$
6. $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2.

Étudier le type de convergence des séries de fonctions de terme général (f_n) définie par :

1. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x^4}$ sur $]0,+\infty[$
3. $f_n(x) = x^{2n}$ sur $[0;1[$
4. $f_n(x) = \sin(x)\cos^n(x)$ sur $[0,\pi]$
5. $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ sur $\mathbb{R}^+$
6. $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$

Exercice 3.

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = (n+1)\sin(x)\cos^n(x)$

1. Déterminer la convergence simple de (f_n) sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$
3. En déduire qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 4.

Considérons la fonction :

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Partie I. Type de convergence.

Q1 Montrer que η est définie sur $]0;+\infty[$.

Q2 Montrer que η converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q3 Montrer que η converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ inclus dans $]1;+\infty[$.

Q4 Montrer que η ne converge pas normalement sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II. Continuité dérivabilité et limite.

Q5 Montrer que η est continue sur $]0;+\infty[$.

Q6 Rappeler le théorème de la double limite. En déduire la limite en $+\infty$ de η

Q7 Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0;+\infty[$ de la fonction :

$$g_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$

En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

Q8 Montrer que η est C^1 et déterminer η'.

Partie III. Rapport avec la fonction zéta.

Q9 On considère l'application définie de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que :

$$\forall x \in]1;+\infty[,\ \eta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$$

Exercice 5.

Soient (f_n) une suite de fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$ convergeant vers une fonction continue f et (x_n) une suite de D convergeant vers un élément x de D

1. Montrer que si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ alors $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

Niveau 2

Exercice 6.

Soit (f_n) et (g_n) les suites de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad\qquad g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Partie I. Rappels

1. Sans démonstration, rappeler les limites simples de (f_n) et de (g_n).
2. Montrer que ces deux suites ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f_n converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Partie II. Convergence uniforme sur tout segemnt de (g_n). Soient x dans $[-R, R]$ et n, p dans $\mathbb{N}$. Posons :

$$a_{p,n} \;=\; 1 - \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{n}$$

1. Montrer que $a_{p,n} \geq 0$
2. Montrer que $f_n - g_n = \sum_{p=0}^{n} a_{p,n} \frac{x^p}{p!}$
3. En déduire que :
$$\forall x \in [-R; R], \quad |f_n(x) - g_n(x)| \leq |f_n(R) - g_n(R)|$$
4. Montrer que (g_n) converge uniformément sur tout segment.

Exercice 7.

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$$

1. Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de f
2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 8.

En utilisant le théorème de Bernstein-Weierstrass, montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ et convergeant uniformément vers 1 sur $[2, 3]$

Exercice 9.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) \;=\; \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0.
2. Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x)$$
3. En déduire que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

Exercice 10.

Notons, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right], \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

où $\lfloor .. \rfloor$ désigne l'application partie entière.

1. Montrer que f_n est continue par morceaux.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f que l'on précisera.
3. Montrer que f n'est pas continue par morceaux. En déduire que la limite uniforme de fonctions continues par morceaux peut ne pas être continue par morceaux.

Niveau 3

Exercice 11.

On admet dans cet exercice que $\mathbb{R}$ est complet, c'est-à-dire que les suites de Cauchy de $\mathbb{R}$ convergent. Soit f une application k-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $k < 1$. On dit que f est strictement contractante.

Partie I. Théorème de Picard. Considérons une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$
2. Puis montrer que
$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ |u_{n+p} - u_n| \leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$$
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer que f admet un unique point fixe que l'on notera x_0.

Partie II. Type de convergence de (f^n).

1. Déterminer la convergence simple de (f^n).
2. En considérant la fonction $g(x) = \frac{x}{2}$, montrer que la convergence peut ne pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$$|f^n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0|$$
4. En déduire que (f^n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.