Probabilité

Exercices de référence

Exercice R1.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face. Montrer que l'événement A="le jeu s'arrête" est presque sûr. Pourtant cela ne signifie pas que le jeu se finisse.

Exercice R2.

On dispose de 2 dés à 6 faces, un parfaitement équilibré et un faisant 6 systématiquement. On choisit un dé au hasard, puis on le lance.

1. Quelle est la probabilité de faire 6 ?
2. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé sachant que l'on a fait 6 ?

Exercice R3.

Trois joueurs A, B et C jouent au ballon :

— Le joueur A passe le ballon à B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

— Le joueur B passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

— Le joueur C passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

Considérons les événements suivant :

$$\begin{cases} A_n & : \text{ le joueur } A \text{ a le ballon au } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \\ B_n & : \text{ le joueur } B \text{ a le ballon au } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \\ C_n & : \text{ le joueur } C \text{ a le ballon au } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$Y_{n+1} = M \times Y_n \qquad \text{avec} \qquad Y_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la limite de la suite (Y_n)

Probabilité

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

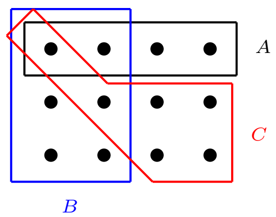
Dans la salle des profs 60% sont des femmes; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice C2.

On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

Exercice C3.

Considérons un univers à 12 éléments muni de la probabilité uniforme et les évènements A, B et C suivants :



1. Vérifier que : $P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B \cap C)$.
2. Montrer que A B et C ne sont pas indépendants.

Ainsi pour montrer que 3 évènements A, B, C sont indépendants, il ne suffit pas de montrer que $P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B \cap C)$.

Exercice C4.

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Montrer que les deux événements suivants sont indépendants :

A "Le premier dé est pair."
B "La somme des dés est paire."

Exercice C5.

1. Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, le complémentaire de B, sont indépendants
2. Soient A_1, ..., A_n des événements indépendants et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, prenons B_i dans $\{A_i, \overline{A_i}\}$. Montrer que B_1, ..., B_n sont des événements indépendants

Niveau 2

Exercice C6.

Soient p_1 et p_2 dans $]0, 1]$. Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Chap. 5

Probabilité

PSI

Exercices

" *Est-ce un progrès si un cannibale se sert d'une fourchette ?*"

S. Jerzy Lec.

Niveau 1

Exercice 1.

Commençons par une citation de J.C. VanDamme :

> " J'adore les cacahuètes. Tu bois une bière et tu en as marre du goût. Alors tu manges des cacahuètes. Les cacahuètes c'est doux et salé, fort et tendre, comme une femme. Et après tu as de nouveau envie de boire de la bière. Les cacahuètes c'est le mouvement perpétuel à la portée de l'homme ".

Supposons que lorsque J.C. VanDamme boive une gorgée de bière, il y a 2 chances sur 3 qu'il mange des cacahuètes à l'instant d'après et donc 1 sur 3 qu'il reprenne de la bière. Inversement quand il prend une poignée de cacahuètes, il y a 1 chance sur 2 qu'à l'instant d'après il boive une gorgée de bière et donc une sur 2 qu'il reprenne des cacahuètes. Notons B_n et C_n les événements :

B_n : "J.C. VanDamme boit de la bière à l'instant n"
C_n : "J.C. VanDamme mange des cacahuètes à l'instant n"

et b_n et c_n leurs probabilités.

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ Déterminer une relation de récurrence sur les X_n
2. En déduire a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 2.

On tire 4 cartes dans un jeu de 32 cartes et on note X la va déterminant le nombre d'as tiré. Donner la loi de X et dessiner son graphe.

Exercice 3.

Soit p une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $p(\{n\}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4.

On considère un dé à 6 faces truqué de sorte que la probabilité d'obtenir un chiffre est proportionnelle à ce chiffre. On note X la variable aléatoire donnant le résultat du dé.

1. Déterminer la loi de X
2. Déterminer la loi de $Y = \frac{1}{X}$

Exercice 5.

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Niveau 2

Exercice 6.

Un homme rentre chez lui le soir et dispose d'un trousseau de k clés qui se ressemblent beaucoup. Lorsqu'il est dans son état normal, il essaie une clé au hasard puis si le résultat est infructueux, il la met de côté et essaie une clé au hasard parmi les clés restantes. A chaque échec, il répète le même processus sur les clés non encore essayées. Lorsque cet homme est ivre, il essaie une clé au hasard puis, à chaque échec, il remet la clé essayée avec les autres de sorte qu'à chaque essai, le choix porte sur la totalité des clés.

1. Calculer la probabilité que l'homme parvienne à ouvrir sa porte en n essais (exactement) sachant qu'il est ivre. Même question sachant qu'il est dans son état normal.
2. Supposons qu'il est ivre un soir sur trois. Calculer la probabilité qu'il parvienne à ouvrir sa porte en n essais.
3. Donner la probabilité que l'homme soit ivre sachant qu'il a réussi à ouvrir sa porte en n essais.

Exercice 7.

On lance un dé à 6 faces pipé faisant 6 avec une probabilité $p = \frac{3}{7}$ jusqu'à obtenir 6 deux fois de suite. On note A_n l'événement

$$A_n \ : \ \text{On a obtenu deux 6 de suite au } n^{\text{ième}} \text{ lancer exactement}$$

et a_n sa probabilité.

1. Donner une relation de récurrence reliant a_n, a_{n+1} et a_{n+2} pour n dans $\mathbb{N}^*$.
2. Donner la valeur de a_n en fonction de n.

Exercice 8.

Une usine fabrique des ampoules a l'aide de trois machines.

Machine	Pourcentage de la fabrication totale	Pourcentage d'ampoules défectueuses
A	50	2
B	30	4
C	20	5

1. Calculer la proportion d'ampoules défectueuses fabriquées par l'usine.
2. Calculer la probabilité pour qu'une ampoule défectueuse provienne de la machine A ? B ? C ?

Exercice 9.

On lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée et on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne pas trois Piles consécutifs au cours des n premiers lancers On pose $p_0 = 1$

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Trouver une relation de récurrence entre p_n, p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
3. Montrer que (p_n) est décroissante.
4. Calculer la limite de (p_n).

Exercice 10.

1. Diagonaliser la matrice :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Soit $(ABCD)$ un carré sur lequel on se déplace comme suit :
   - Si on se trouve en A à l'étape n, on va en B avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, en D avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et on reste en A avec une probabilité de $\frac{1}{6}$
   - Si on se trouve en B à l'étape n, on va en C avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, en A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et on reste en B avec une probabilité de $\frac{1}{6}$
   - Si on se trouve en C à l'étape n, on va en D avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, en B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et on reste en C avec une probabilité de $\frac{1}{6}$
   - Si on se trouve en D à l'étape n, on va en A avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, en C avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et on reste en D avec une probabilité de $\frac{1}{6}$

   On note a_n la probabilité d'être en A après n étapes. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 11.

On considère n boîtes sont numérotées de 1 à n. Pour tout k de $\{1,\dots,n\}$, la boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Pour tout k de $\{1,\dots n\}$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
3. En déduire la loi du couple (X,Y).
4. Calculer $P(X = Y)$.
5. Déterminer la loi de Y.

Exercice 12.

Soit E un ensemble de cardinal n. Au tire on hasard et avec remise A, B des parties de E, les deux tirages étant successifs et indépendants. Calculer la probabilité que $card(A \cap B) = 1$.

Exercice 13.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. Notons $\mathcal{A}^*$ les événements de probabilité non nulles. On rappelle que pour tout événement C de $\mathcal{A}^*$, on définit la probabilité conditionnelle :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ p_C(A) = \frac{p(A\cap C)}{p(C)}$$

De plus, deux événements A et B dont dits super indépendants s'ils sont indépendants pour toute probabilité p_C c'est-à-dire ssi :

$$\forall C \in \mathcal{A}^*,\ p_C(A\cap B) = p_C(A)p_C(B)$$

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des propositions suivantes :

$$\begin{cases} A \text{ et } B \text{ sont super indépendants} & (P_1) \\ A,\ B,\ \bar{A} \text{ ou } \bar{B} \text{ ont une probabilité nulle pour } p & (P_2) \end{cases}$$

1. Montrer que A et B sont indépendants pour une probabilité p_C si et seulement si A et $\bar{B}$ sont indépendants pour p_C.
2. Montrer que si $p(B) = 0$ alors (P_1) est vérifiée.
3. Montrer que (P_2) implique (P_1).
4. Supposons que $C = \overline{A \cap B}$ soit dans $\mathcal{A}^*$. Calculer $p_C(A \cap B)$ puis en déduire que si (P_1) est vérifiée alors $p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0$ ou $p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0$.
5. Montrer que (P_1) implique (P_2).