Réduction des endomorphismes

Exercices de référence

Exercice R1.

Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$
2. Déterminer un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.
3. En déduire A^n.

Exercice R2.

Soit A dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $Tr(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer la liste des vp de A ainsi que leur multiplicité. En déduire une matrice D diagonale semblable à A.
3. Donner tous les polynômes annulateurs de A.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I.

Exercice R3.

Considérons la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer A telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice R4.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par
$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples.

Réduction des endomorphismes

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

Questions indépendantes :

1. Soit P dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si λ vp de u alors $P(\lambda)$ vp de $P(u)$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 en fonction de sa trace et de son déterminant.
3. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec une unique vp sur $\mathbb{C}$. Montrer que A diagonalisable si et seulement s'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I$.
4. On admet que $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Déterminer toutes les matrices diagonales semblables à A.
5. Déterminer une matrice diagonalisable dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.
6. Montrer que les symétries et les projections sont diagonalisables. Déterminer la forme des matrices diagonales associées.
7. Montrer que les matrices nilpotentes non nulles ne sont pas diagonalisables.
8. Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.
9. Montrer que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sev stable est encore diagonalisable.

Exercice C2.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes suivant :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty & \to & \mathcal{C}^\infty \\ f & \mapsto & f' \end{array} \qquad\qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$$

En déduire qu'un endomorphisme peut n'avoir aucune valeur propre ou en avoir une infinité.

Exercice C3.

Soit A un matrice à coefficients réels. :

1. Montrer que λ valeur propre de A d'ordre p ssi $\bar{\lambda}$ valeur propre de A d'ordre p.
2. Montrer que si $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ alors $E_\lambda = \mathrm{Vect}(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_p})$.
3. En déduire que les espaces propres E_λ et $E_{\bar{\lambda}}$ sont de même dimension.

Exercice C4.

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que le polynôme caractéristique associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -a_0 \\ \hline & -a_1 \\ & -a_2 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -a_{n-2} \\ & -a_{n-1} \end{array}\right)$$

est le polynôme P. Cette matrice est la matrice compagnon de P.

Exercice C5.

Déterminer le polynôme caractéristique et les espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice C6.

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = (X-1)P'$.

1. Déterminer $f((X-1)^p)$ pour tout p de $\{0,\dots,n\}$.
2. En déduire que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice C7.

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une base de vecteurs propres puis déterminer la matrice de changement de base P pour avoir $P^{-1}AP$ diagonale
3. Déterminer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice C8.

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n & + & 4v_n \end{array} \right.$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice C9.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que :
$$A \text{ nilpotente} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$$
Que penser de ce résultat si on considère le spectre sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille nÖn ne peut dépasser n.

Exercice C10.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \\ -3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice C11.

Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 0 & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs propres.

Niveau 2

Exercice C12.

Soit u un endomorphisme de E de dimension finie et P dans $\mathbb{K}[X]$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\mathrm{Sp}(P(u)) = \left\{ P(\lambda) \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \right\}$$

1. Montrer que si x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ alors x est aussi vecteur propre de $P(u)$ associée à la valeur propre $P(\lambda)$. Quelle inclusion a-t-on montrée ?
2. Soit μ une valeur propre de $P(u)$. En factorisant $P - \mu$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer en utilisant le déterminant, qu'au moins une des racines de $P - \mu$ est valeur propre de u. En déduire l'autre inclusion.

Exercice C13.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A^2 soit diagonalisable.

1. Montrer que A n'est pas forcément diagonalisable.
2. Montrer que si 0 n'est pas valeur propre, alors A est diagonalisable.

Exercice C14.

Soient u, v des endomorphismes d'un espaces vectoriel E de dimension finie vérifiant :

$$\begin{cases} u \text{ et } v \text{ commutent.} \\ u \text{ et } v \text{ sont diagonalisables.} \end{cases}$$

1. Soit F un sous espace propre de v. Expliquez pourquoi l'endomorphisme induit u_F existe et est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une base de F formée de vecteurs qui sont propres pour u et pour v.
3. En déduire que u et v sont simultanément diagonalisables.

4. Montrer réciproquement que si u, v sont simultanément diagonalisables alors u et v commutent.

Exercice C15.

Soit A une matrice carrée et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Supposons de plus que $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_{p-1}| < |\lambda_p|$. Notons pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{tr(A^{n+1})}{tr(A^n)}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_p$
2. Écrire un programme en Python permettant de trouver la vp de plus grand module d'une matrice.

Niveau 3

Exercice C16.

Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sev propres de A. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer C_2 tels que $AC_2 = C_1 + C_2$
4. Déterminer C_3 tels que $AC_3 = C_2 + C_3$
5. Déterminer T triangulaire supérieur et P inversible pour que $A = PTP^{-1}$.

Exercice C17.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $tr(A^k) = 0$ pour tout k de $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton que $det(A) = 0$.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   où B est dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
3. Montrer par récurrence sur n que A est nilpotente.

Exercice C18.

Soit D une matrice diagonale de taille $n \times n$ avec les coefficients diagonaux tous différents. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M \text{ commute avec } D \iff M \text{ est diagonale}$$

1. Directement en comparant MD et DM.
2. En montrant que les vecteurs propres de D sont des vecteurs propres de M.

Exercice C19.

Notons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 - M^3 + M = A$. Montrer que M et A commutent.
3. En déduire les valeurs de M possibles.

Réduction des endomorphismes

Exercices

" *Quand un philosophe me répond,*
je ne comprends plus ma question."

P. Desproges

Niveau 1

Exercice 1.

Déterminer A^n avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ par trois méthodes différentes :

1. en diagonalisant,
2. à l'aide de la formule de Newton,
3. en effectuant une division euclidienne.

Exercice 2.

Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$. Montrer que A, B et C sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A vérifie :

1. $A^3 - 3A - 5I = 0$ alors $det(A)$ est strictement positif.
2. $A^3 + A^2 + A = 0$ alors $rg(A)$ est paire.
3. $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$ alors $tr(A)$ est un entier naturel.

Exercice 4.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et M la matrice définie par blocs par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_M = \chi_{A+B}\chi_{A-B}$.

Exercice 5.

Déterminer les vp et Vp de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P + P'$.

Exercice 6.

Est-ce que $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 7.

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les matrices qui commutent avec A.

Niveau 2

Exercice 8.

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et M, N les matrices définies par blocs par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer χ_M et χ_N en fonction de χ_A
2. Montrer que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable.
3. Montrer que si N est diagonalisable alors A est diagonalisable.
4. Y-a-t-il des réciproques dans les questions 2 et 3 ?

Exercice 9.

Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ on pose $L(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que L est diagonalisable.
3. En déduire $tr(L)$ et $det(L)$.

Exercice 10.

Déterminer une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables. En déduire l'espace vectoriel engendré par les matrices diagonalisables.

Exercice 11.

Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M) = {}^tM$.

1. Déterminer les éléments propres de f.
2. f est-elle diagonalisable ?
3. Donner le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de f .
4. Quelle est la nature de f ? En déduire que : $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Exercice 12.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. On considère les matrices par blocs de taille $2n$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \qquad\qquad V = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer UV et VU.
2. En déduire que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
3. Supposons AB et BA diagonalisable. Montrer que AB et BA sont semblables.

Exercice 13.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On admet l'existence de l'indice de Fitting de u défini par :

$$n_0 = \operatorname{Min}\left\{ n \in \mathbb{N} \,/\, \operatorname{Ker}(u^n) = \operatorname{Ker}(u^{n+1}) \right\}$$

1. Soit P un polynôme annulateur de u de valuation r c'est-à-dire que P s'écrit :
$$P = a_r X^r + a_{r+1} X^{r+1} + \ldots + a_n X^n$$
avec $a_r \neq 0$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^r) = \operatorname{Ker}(u^{r+1})$. En déduire que $n_0 \leq r$.
2. En déduire l'indice de Fitting d'un endomorphisme diagonalisable. On distinguera les cas u inversible/u non inversible.

Exercice 14.

Pour tout a, b, c de $\mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M_{abc} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Notons $J = M_{010}$. Exprimer M_{abc} en fonction de I, J et J^2.
2. Soit $E = \{M_{abc} \,/\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble E est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ? Si oui, quelle est sa dimension ? E est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associées.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.
6. On note f_{abc} l'endomorphisme canoniquement associé à M_{abc}. Déterminer les conditions sur a, b et c pour que f_{abc} soit un projecteur. Donner alors ses éléments caractéristiques.

Exercice 15.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres et déterminer les espaces propres associés.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur propre pour la valeur propre 2. Trouver les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que :

$$f\left(\overrightarrow{v}\right) = 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \qquad\qquad f\left(\overrightarrow{w}\right) = 2\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$$

3. Soit $\overrightarrow{e}$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Démontrer que $\left(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis déterminer la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 16.

Soient P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice $B = P(A)$. Le but de l'exercice est de montrer que les valeurs propres de B sont exactement les $P(\lambda)$ avec λ valeur propre de A.

1. Démontrer que si $\overrightarrow{x}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors $\overrightarrow{x}$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre $P(\lambda)$.
2. Soit μ dans $\mathbb{C}$. On décompose le polynôme $P - \mu$ en produit de facteurs irréductibles :

$$P - \mu = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_r)$$

   a) Montrer que :
   $$det(B - \mu I_n) = a^n det(A - \alpha_1 I_n) det(A - \alpha_2 I_n)\dots det(A - \alpha_r I_n)$$
   b) En déduire que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$
3. *Application :* Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_r)$.
   a) Montrer que $P(A)$ est une matrice nilpotente.
   b) Quand a-t-on $P(A) = 0$?

Exercice 17.

Soit a, b, c, d dans $\mathbb{C}$ et :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que J est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
2. Exprimer A comme un polynôme en J. En déduire le déterminant de A
3. Généraliser en dimension n.

Exercice 18.

Posons pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$$

Notons P_n le polynôme caractéristique associé à A_n.

1. Calculer P_1 et P_2.
2. En utilisant la multilinéairité du déterminant, montrer que :

$$P_n = -X(X-1)(X-2)\dots(X-n+2) + (X-n+1)P_{n-1}$$

3. Montrer que :
$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\},\ (-1)^{n-k} P_n(k) > 0$$
4. En déduire que A_n est diagonalisable.

Niveau 3

Exercice 19.

Soit A une matrice inversible et N une matrice nilpotente telles que $AN = NA$.

1. Montrer que $A^{-1}N$ est nilpotente.
2. Montrer que $det(A + N) = det(A)$

Exercice 20.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Une racine carrée de A est une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = R.R$.

1. Montrer que R et A commutent.
2. Montrer que si R est diagonalisable alors A aussi. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Supposons jusqu'à la fin de l'exercice que A a n valeurs propres distinctes. Montrer que A possède n espaces propres de dimension 1.
4. Montrer que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de R.
5. En déduire que A possèdent 2^n ou $2^n - 1$ racines carrées.

Exercice 21.

Soit M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Notons χ_{M_n} le polynôme caractéristique de M_n et pour α fixé dans $\mathbb{R}$, on note $u_n = \chi_{M_n}(2\cos(\alpha))$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n = 2\cos(\alpha)u_{n-1} - u_{n-1}$$
2. Montrer que :
$$u_n = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$$
En déduire le spectre de M_n.
3. Notons λ une valeur propre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose également $x_0 = x_{n+1} = 0$. Montrer que :
$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k$$
En déduire E_λ.