Chap. 3

Séries numériques

PSI

Exercices de référence

Exercice R1.

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}} \qquad \sum \frac{1}{n^{\cos(\frac{1}{n})}} \qquad \sum \frac{1}{n^{\mathrm{ch}(\frac{1}{n})}} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$$

Exercice R2.

Posons :

$$H_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{n} \qquad U_n = H_n - \ln(n) \qquad V_n = H_n - \ln(n+1)$$

Version A.

1. Montrer que : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $U_{n-1} - U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$
3. En déduire que (U_n) est convergente. Sa limite est notée γ, c'est la constante d'Euler.

Version B.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer la monotonie de (U_n) et (V_n).
2. En déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite. Leur limite est notée γ, c'est la constante d'Euler.
3. Montrer que $|U_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.
4. Écrire un programme Python permettant de calculer γ avec la précision souhaitée.

Exercice R3.

On rappelle quelques informations sur l'intégrale de Wallis :

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

De plus, posons :

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - u_{n+1}$$

1. Montrer que $v_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1$
2. En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que (u_n) est convergente.
4. Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = e^{u_n}$. Montrer que
$$\frac{\sqrt{2}w_{2n}}{w_n^2} = \sqrt{n}\frac{2}{\pi}I_{2n}$$
5. En déduire la formule de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Séries numériques

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

1. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente et déterminer un équivalent du reste.

Exercice C2.

Étudier la nature des séries suivantes. Dans le cas où la série est convergente, déterminer sa limite :

1) $\sum x^n \cos(n\theta)$ 2) $\sum \frac{1}{k^2 - 1}$

3) $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 4) $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice C3.

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\frac{ln(n)}{n}$ *b)* $\frac{\sin^2(n)}{n^2}$ *c)* $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

d) $\frac{n!}{n^n}$ *e)* $\frac{n}{2^n}$ *f)* $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

Exercice C4.

Montrer que le produit de deux séries exponentielles $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ est la série exponentielle $\sum \frac{(a+b)^n}{n!}$.

Exercice C5.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$
2. Soit α dans $]0;1[$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$
3. Soit α dans $]1;+\infty[$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Niveau 2

Exercice C6.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente, puis déterminer un équivalent de la somme partielle en $+\infty$.

Exercice C7.

Soient p dans $\mathbb{N}^*$ et :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Déterminer α et β tels que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\alpha}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)} + \frac{\beta}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$$

3. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice C8.

Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1. Montrer que la série converge.
2. Montrer que pour tout k dans $\{1,\dots,n\}$, on a : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$
3. En déduire que le produit de Cauchy de la série avec elle-même est divergent.

Exercice C9.

Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1. Montrer que la série converge.
2. Montrer que pour tout k dans $\{1,\dots,n\}$, on a : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$
3. En déduire que le produit de Cauchy de la série avec elle-même est divergent.

Exercice C10.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

1. Montrer que (S_n) est convergente, puis que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} = \ln\left(\frac{(2n+1)(2n)!^2}{2^{4n} n!^4}\right)$$

2. En déduire que (S_n) converge vers $\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Séries numériques

Exercices

" L'herbe est toujours plus verte chez les autres...
jusqu'à ce qu'on découvre que c'est du gazon artificiel."

J. Salmé

Niveau 1

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries de terme général :

$a)$ $ne^{\frac{1}{n}} - n$	$b)$ $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$c)$ $\sin\left(\dfrac{n^2+1}{n}\pi\right)$
$d)$ $\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$	$e)$ $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$	$f)$ $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
$g)$ $\dfrac{a^n n!}{n^n}$	$h)$ $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$i)$ $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

Exercice 2.

1. Montrer que pour toute suite (u_n) de $[0,1[$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1-u_n)$ sont de même nature.
2. Déterminer la nature de série de terme général :

$$u_n \;=\; 1-\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^n$$

3. Multiplicateur d'Abel : soit (u_n) une suite positive et $U_n = u_0 + \ldots + u_n$. Montrer que les séries suivantes sont de même nature :

$$\sum u_n \qquad\qquad \sum \frac{u_n}{U_n}$$

Exercice 3.

Soit α dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. Etudier la nature des séries suivantes. Dans le cas où la série est convergente, déterminer sa limite :

$$1)\quad \sum \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) \qquad 2)\quad \sum \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \qquad 3)\quad \sum \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)$$

Exercice 4.

Convergence et valeur de :

$$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Indication : On pourra calculer $u_{2n}+u_{2n+1}$ avec $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Niveau 2

Exercice 5.

Soit (u_n) une suite décroissante de $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$2^n u_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k \leq 2^n u_{2^n}$$

2. En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature [règle de la loupe].
3. Soit α et β dans $\mathbb{R}$. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou [$\alpha = 1$ et $\beta > 1$].

Exercice 6.

Déterminer la nature des séries :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n\ln(n)} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

Exercice 7.

En utilisant le théorème de Cesàro, déterminer la nature de la série :

$$\sum \frac{1}{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$$

Exercice 8.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \qquad v_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$$

1. Calculer $u_n + u_{n+1}$. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

3. En utilisant une méthode similaire sur v_n, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Exercice 9.

Soit α dans $\mathbb{R}_+^*$ et β dans $\mathbb{R}$ tel que β ne soit pas un multiple de 2π. Le but de l'exercice est montrer que les séries :

$$\sum \frac{\sin(\beta n)}{n^\alpha} \qquad\qquad \sum \frac{\cos(\beta n)}{n^\alpha}$$

sont semi-convergentes. Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\beta k)$$

Partie I. Convergence des séries.

1. Montrer que (S_n) est borné.
2. Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\beta n)}{n^\alpha} = \frac{S_N}{N^\alpha} - S_0 + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$
3. En déduire que : $\sum \frac{\sin(\beta n)}{n^\alpha}$ est convergente.
4. Montrer que : $\sum \frac{\cos(\beta n)}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie II. Pas de convergence absolue.

1. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $|\sin(x)| \geq \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.
2. En déduire que les séries sont semi-convergentes.

Exercice 10.

Le but de l'exercice est de montrer que la série S définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}$$

est divergente. Pour cela, pour tout n de $\mathbb{N}$, notons :

$$T_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \ / \ 2\pi n + \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{k} \leq 2\pi n + \frac{3\pi}{4} \right\}$$

1. Montrer que pour k dans T_n, on a : $\dfrac{\sin\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{2\sqrt{2}}{8\pi n + 3\pi}$
2. Montrer que :
$$card(T_n) \geq \left(2\pi n + \frac{3\pi}{4}\right)^2 - \left(2\pi n + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 1$$
3. En déduire que :
$$\sum_{k \in T_n} \frac{\sin\left(\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$$
4. Supposons que la série (S_n) soit convergente et notons (R_n) son reste. Exprimer $\sum\limits_{k \in T_n} \frac{\sin\left(\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}$ à l'aide d'éléments de (R_n). Conclure.

Exercice 11.

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie I. Le théorème.

1. Posons $v_n = \ln(n^a u_n)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire que (v_n) est convergente et qu'il existe K dans $\mathbb{R}$ tel que : $u_n \sim \frac{K}{n^a}$
3. Pour quelles valeurs de a, la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Partie II. Une application Pour a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, on note :

$$u_n = \left(\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)}\right)^\lambda$$

Montrer que $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\lambda(b-a) > 1$.

Niveau 3

Exercice 12.

Soit p dans $\mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de montrer que la série S :

$$\sum \sin(n!ep\pi)$$

est convergente si et seulement si p est impair.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons :

$$a_n = n!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \qquad b_n = n!e - a_n$$

1. Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n.n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = \frac{1}{(n+1).n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

   Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que :

$$a_n + \frac{1}{n+1} \leq n!e \leq a_n + \frac{1}{n}$$

3. Déterminer un équivalent de b_n.
4. Montrer que (b_n) est décroissante.
5. Montrer que a_n est un entier puis donner sa parité en fonction de n.
6. Montrer que :

$$\sin(n!ep\pi) = (-1)^{a_n p} \sin(b_n p\pi)$$

7. En déduire la convergence de la série S