Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Exercices de référence

Exercice R1.

Soient λ_0, ..., λ_n dans $\mathbb{C}$. Posons

$$V(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \ldots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \qquad VP(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1+\lambda_0 & 1+\lambda_0^2 & \ldots & 1+\lambda_0^n \\ 2 & 1+\lambda_1 & 1+\lambda_1^2 & \ldots & 1+\lambda_1^n \\ 2 & 1+\lambda_2 & 1+\lambda_2^2 & \ldots & 1+\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 1+\lambda_n & 1+\lambda_n^2 & \ldots & 1+\lambda_n^n \end{vmatrix}$$

1. Montrer que :
$$V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n} (\lambda_j-\lambda_i)$$
En déduire que $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \neq 0$ si et seulement si les $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont distincts.
2. Montrer que :
$$VP(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = 2.V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

Exercice R2.

On définit la suite des polynômes de Tchebychev (T_n) par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{,}\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

1. Montrer que :
$$\forall n\mathbb{N},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ cos(n\theta) = T_n(cos\theta) \qquad (*)$$
2. Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant la relation $(*)$.
3. Calculer T_5 avec la relation de récurrence, puis avec la relation $(*)$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n,
5. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n scindé et à racines simples.
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} si $n \geq 1$. En déduire la forme factorisée de T_n.

Exercice R3.

Soient n dans $\mathbb{N}$ et $a_0,\ldots,a_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts.

1. Pour tout i dans $\{0,\ldots,n\}$, il existe un unique polynôme L_i de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour tout j de $\{0,\ldots,n\}$. Ce polynôme vaut :
$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$
2. La famille $(L_0,\ldots,L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont :
$$(P(a_0), P(a_1),\ldots,P(a_n))$$
En d'autres termes, on a :
$$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + \ldots + P(a_n)L_n$$
4. En particulier, on a : $L_0 + L_1 + \ldots + L_n = 1$

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

Une famille de polynômes est dite échelonnée en degré (resp. en valuation) si et seulement les degrés (resp. les valuations) des polynômes sont différents.

1. Montrer que toute famille échelonnée en degré de polynômes non nuls est libre.
2. Montrer que toute famille échelonnée en valuation de polynômes non nuls est libre.

Exercice C2.

Soient a_0, …, a_n des réels distincts. Montrer que l'application ϕ définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(P) \;=\; \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$$

est une norme.

Exercice C3.

Décomposer $X^4 + 1$, en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice C4.

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A$
2. En déduire A^{-1} et A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice C5.

Calculer le déterminant :

$$\Delta_n(X) \;=\; \begin{vmatrix} X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2X & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2X \end{vmatrix}$$

Exercice C6.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour x dans $\mathbb{R}$.

Exercice C7.

Déterminer $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}l_n(\mathbb{K}))$. On pourra considérer les matrices $I_n + E_{ij}$.

Exercice C8.

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_5)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E et f un endomorphisme de E tel que :

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner 18 sev stables par f.

Exercice C9.

Montrer que les familles de fonctions suivantes sont libres :

1. $\left(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t}\right)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts dans $\mathbb{C}$.
2. $(\cos \alpha_1 t, \dots, \cos \alpha_n t)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts dans $\mathbb{R}^+$.
3. $(\sin \alpha_1 t, \dots, \sin \alpha_n t)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice C10.

Le but de l'exercice est de redémontrer l'existence des polynômes de Lagrange avec le déterminant de Vandermonde. Soient $a_0, \dots, a_n$ distincts dans $\mathbb{R}$ et notons ϕ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \phi(P) = (P(a_0), \dots P(a_n))$$

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une famille de polynômes $(L_0, \dots, L_n)$ qui forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et qui vérifie :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \ L_i(a_j) = \delta_{ij}$$

Exercice C11.

1. Montrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$$

2. Montrer que :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les $\mathbb{R}$-ev des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice C12.

1. Montrer que les matrices A et B ne sont pas semblables dans les 3 cas suivants :

	$Cas1$	$Cas2$	$Cas3$
A	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice C13.

Soit p une projection d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que : $tr(p) = rg(p)$.

Exercice C14.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons par ϕ l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \phi(f)(x) \ = \ f(-x)$$

Montrer que ϕ est une symétrie dont vous donnerez les éléments caractéristiques. Quelle est la projection associée ?

Exercice C15.

Déterminer $Vect(\mathcal{G}l_n(\mathbb{K}))$. On pourra considérer la famille $(I_n + E_{ij})_{ij}$.

Exercice C16.

Posons $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P(1) = 0 \right\}$.

1. Montrer que H est un hyperplan.
2. Déterminer une équation de H dans la base canonique.
3. Déterminer toutes les formes linéaires ayant H pour noyau.

Niveau 2

Exercice C17.

Déterminer la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice C18.

En fonction des réels a, b, c et d, donner la valeur de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

Exercice C19.

Soit a, b et c dans $\mathbb{R}$. Posons :

$$\Delta_1(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_2(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_1(a,b)$ à l'aide d'OE.
2. Notons A_{abc} la matrice associée au déterminant $\Delta_2(a,b,c)$ et posons $f(x) = det(A_{abc} + xJ)$ avec J la matrice ne contenant que des 1. Montrer que f est affine.
3. En déduire la valeur de $\Delta_2(a,b,c)$ pour $b \neq c$.
4. En admettant que Δ_2 soit continue par rapport à c, retrouver la valeur de Δ_1 à l'aide de celle de Δ_2.

Exercice C20.

1. Vérifier que : $\forall A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{C}),\ tr(AB) = tr(BA)$
2. Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour tous A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice C21.

Soient a, b, c et d des réels. Posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \end{vmatrix} \qquad f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ x+a & x+b & x+c & x+d \\ x+a^2 & x+b^2 & x+c^2 & x+d^2 \\ x+a^3 & x+b^3 & x+c^3 & x+d^3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que l'application f est affine.
2. En déduire Δ.

Exercice C22.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle C et une matrice ligne non nulle L vérifiant $A = CL$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = tr^{n-1}(A).A$.

3. Montrer que A est semblable à une matice du type :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \qquad \text{et du type} \qquad \left(\begin{array}{cccc} * & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right)$$

Exercice C23.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont tous différents. On définit de plus le commutant d'une matrice M par :

$$C_M = \left\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \, / \, MN = NM \right\}$$

On note également pour tout matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[M] = \left\{ P(M) \, / \, P \in \mathbb{K}[X] \right\}$$

1. Montrer que C_M est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Montrer que toute matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en D.
3. En déduire que :
$$C_D = D_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[D]$$
4. En déduire que : $C_A = \mathbb{K}[A]$.

Exercice C24.

Calculer $T_n(ch(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice C25.

Déterminer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^4 - 1} dx$

Exercice C26.

Soient A, B, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier qu'en règle générale :
$$det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq det(AD - BC) \neq det(A)det(D) - det(B)det(C)$$
2. Montrer que si D est inversible et si C et D commutent alors :
$$det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC)$$
On pourra utiliser la matrice : $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$

Niveau 3

Exercice C27.

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soient f dans $\mathcal{L}(E,F)$ et g dans $\mathcal{L}(E,G)$. Montrer que :
$$Ker(f) \subset Ker(g) \iff \exists h \in \mathcal{L}(F,G),\ g = h\ o\ f$$
2. Soient f dans $\mathcal{L}(F,E)$ et g dans $\mathcal{L}(G,E)$. Montrer que :
$$Im(g) \subset Im(f) \iff \exists h \in \mathcal{L}(G,F),\ g = f\ o\ h$$
3. Que retrouve-t-on dans le cas où $g = Id$?

Exercice C28.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que :
   - u est une homothétie.
   - $(x, u(x))$ est lié pour tout x de E
   - $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda_x x$
   - u laisse stable toutes les droites vectorielles de E
2. Montrer que les endomorphismes qui commutent avec tous les autres sont exactement les homothéties

Exercice C29.

1. Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples pour tout polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors $PP'' - P'^2 \geq 0$.

Exercice C30.

Soit E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $K_n = Ker(f^n)$ et $I_n = Im(f^n)$.

1. Montrer que la suite (K_n) est croissante (pour l'inclusion), et que (I_n) est décroissante.
2. Supposons désormais que la dimension de E est fini. Montrer que ces suites stationnent exactement au même indice n_0 appelé l'indice de Fitting. On a :
$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} \{0\} & \subsetneq & K_0 & \subsetneq & K_1 & \subsetneq & \dots & \subsetneq & K_{n_0} & = & K_{n_0+1} & = & \dots \\ E & \supsetneq & I_0 & \supsetneq & I_1 & \supsetneq & \dots & \supsetneq & I_{n_0} & = & I_{n_0+1} & = & \dots \end{array}\right.$$
3. Montrer que : $E = Ker(f^{n_0}) \oplus Im(f^{n_0})$.
4. Montrer que K_{n_0} et I_{n_0} sont stables par f, puis montrer que $f_{K_{n_0}}$ est nilpotent et $f_{I_{n_0}}$ est un automorphisme.
5. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a la forme :
$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$$
   où A est une matrice inversible et N une matrice nilpotente.
6. Quels sont les indices de Fitting dans le cas d'un automorphisme ? d'une symétrie ? d'une projection ?

Exercice C31.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et f, $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\begin{array}{ccccc} rg(f) + rg(g) - n & \leq & rg(f\ o\ g) & \leq & min(\ rg(f), rg(g)\ ) \\ |\, rg(f) - rg(g)\, | & \leq & rg(f+g) & \leq & rg(f) + rg(g) \end{array}$$

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Exercices

" *Tout est difficile avant de devenir facile.*"

T. Fuller

Niveau 1

Exercice 1.

Soit f et g des endomorphismes de E tels que $f\,o\,g = Id_E$.

1. Montrer que si E est de DF alors f et g sont bijectives.
2. Montrer qu'en DI, on peut avoir f ou g non bijectives.

Exercice 2.

Le but de l'exercice est de chercher l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les autres. Cet ensemble est appelé le centre de $M_n(\mathbb{R})$.

Considérons une matrice A dont les coefficients sont notés par les réels (a_{ij}). De plus pour tout i et j de $\{1,\ldots,n\}$, on note par E_{ij} la matrice élémentaire contenant des 0 partout sauf à la ligne i et la colonne j où elle contient un 1.

1. Montrer que $E_{1i}AE_{j1} = a_{ij}E_{11}$ pour tout i, j de $\{1,\ldots,n\}$.
2. En déduire que A est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $A = \lambda.I_n$

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(f^n)$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+1}) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f^{n+1}) = \mathrm{Im}(f^{n+2})$
3. Montrer que si $\dim(E) = 3$ alors $\mathrm{rg}(f^3) = \mathrm{rg}(f^4)$.

Exercice 4.

Trouver u, v et w les nombres complexes de modules 1 tels que $\begin{cases} u+v+w=1 \\ u.v.w=1 \end{cases}$

Niveau 2

Exercice 5.

On note Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est une application linéaire.
2. Montrer qu'une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ périodique est constante. En déduire le noyau de Δ.
3. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P
4. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ à la source et $\mathbb{R}_n[X]$ au but. Montrer que Δ_n est surjective pour tout n de $\mathbb{N}$.
5. Montrer que Δ est surjective.

Exercice 6.

Soit E un k-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est une projection alors $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. L'endomorphisme f est à présent quelconque, montrer que
$$\begin{array}{rcl} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} & \iff & Ker(f) = Ker(f^2) \\ E = Ker(f) + Im(f) & \iff & Im(f) = Im(f^2) \end{array}$$
3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Montrer que :
$$Ker(f) = Ker(f^2) \iff Im(f) = Im(f^2)$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 7.

Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-ev E. Supposons de plus u nilpotent.

1. Montrer que $u \, o \, v$ n'est pas forcément nilpotent.
2. On suppose dans le reste de l'exercice que u et v commutent. Montrer que $u \, o \, v$ est nilpotent.
3. Montrer que $I_E - \lambda.u$ est inversible pour tout λ de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si v est inversible alors $u+v$ est inversible. On pourra exprimer $u+v$ comme une composée.
5. Montrer la réciproque de la proposition précédente.

Exercice 8.

1. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.
2. Soit f dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si f n'est pas constante alors $(1, f, f^2, \ldots, f^n)$ est libre pour tout n de $\mathbb{N}$. Ici f^n signifie $f \times \ldots \times f$.

Exercice 9.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On considère les déterminants $n \times n$ suivants :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n+1 \end{vmatrix} \quad E_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad F_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

Ainsi le déterminant D_n ne contient que des 1 sauf sur la diagonale où il y a 2, 3, ..., $n+1$. Le déterminant E_n est identique à D_n sur les $n-1$ premières lignes et ne contient que des 1 sur la dernière ligne. Enfin le déterminant F_n est aussi identique à D_n sur les $n-1$ premières lignes et contient des 0 sur la dernière sauf sur la diagonal où il y a n.

1. Calculer E_2, E_3, E_4, puis enfin E_n pour n quelconque.

2. Exprimer F_n en fonction de D_{n-1}.
3. Expliquer pourquoi $D_n = E_n + F_n$. En déduire une relation de récurrence sur les D_n.
4. Posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $D_n = (1 + H_n)n!$

Exercice 10.

Soient E_1,. . .,E_n des sev d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

1. Montrer que $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ si et seulement s'il existe une famille $(p_1, \ldots, p_n)$ de projections de E vérifiant pour tout i et j de $\{1, \ldots, n\}$:
   - $Id = p_1 + \ldots + p_n$
   - $p_i \, o \, p_j = 0$ si $i \neq j$.
   - $Im(p_i) = E_i$.
2. Montrer que cette famille de projections est unique.

Exercice 11.

Notons (U_n) la suite de polynômes définies par la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1}$$

avec $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$ (C'est la même relation de récurrence que pour les polynômes de Tchebychev).

1. Montrer que les propositions :

$$\begin{cases} P_1 : & \forall n \in \mathbb{N},\ \exists V_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(nx) = V_n(\sin(x)) \\ P_2 : & \forall n \in \mathbb{N},\ \exists V_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(nx) = V_n(\cos(x)) \end{cases}$$

   sont fausses.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sin(nx) = \sin(x)U_n(\cos(x))$$

3. Que peut-on dire du degré et du coefficient dominant de U_n ?

Exercice 12.

Soient M et J les matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} r_1 & a & \ldots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \ldots & b & r_n \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

On note également P le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (r_k - X)$$

1. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{R}$, il existe α et β réels tels que

$$det(M + \lambda J) = \alpha + \lambda\beta$$

2. En déduire à l'aide de P la valeur de $det(M)$ dans le cas où a et b sont distincts.
3. Calculer $det(M)$ si $a = b$. On admettra ici que le déterminant est continue et donc que l'on peut inverser les symboles lim et det.

Exercice 13.

Soient a, b et c dans $\mathbb{K}$ et :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

1. Déterminer une relation récurrente vérifiée par Δ_n.
2. Calculer Δ_n dans les cas suivants :

   a) $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$ *b)* $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ *c)* $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$

Niveau 3

Exercice 14.

Soit E une $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P = a_0 + a_1.X + \dots + a_nX^n$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P(u)$ l'endomorphisme :

$$P(u) = a_0Id + a_1.u + \dots + a_nu^n$$

où $u^k = u\, o\, u\, o\, \dots\, o\, u$ (k fois). Enfin P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0$

1. Montrer que l'ensemble A des polynômes annulateurs de u est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que pour tout polynôme P, l'ensemble $(P) = \{PQ/Q \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$
3. Considérons l'ensemble $B = \{Deg(P) \in \mathbb{N} \,/\, P \in A \setminus \{0\}\}$. On admettra que B est non vide. Montrer que B admet un minimum n_0
4. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_0 dans A de degré n_0. On l'appelle le polynôme minimal de u.
5. Montrer que $(P_0) \subset A$.
6. Montrer que $A \subset (P_0)$.
7. En déduire l'unicité du polynôme minimal.

Exercice 15.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $P = (a_i)$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le polynôme P est dit réciproque de première espèce (resp. de deuxième espèce) si et seulement si pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, on a : $a_k = a_{n-k}$ (resp. $a_k = -a_{n-k}$). On notera $R_n^+(\mathbb{C})$ (resp. $R_n^-(\mathbb{C})$) l'ensemble de ces polynômes.

1. Montrer que $X^nP\left(\frac{1}{X}\right)$ est un polynôme et que :

$$\begin{cases} P \in R_n^+(\mathbb{C}) & \Longleftrightarrow & X^nP\left(\frac{1}{X}\right) = P \\ P \in R_n^-(\mathbb{C}) & \Longleftrightarrow & X^nP\left(\frac{1}{X}\right) = -P \end{cases}$$

2. Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $\phi(P) = X^nP\left(\frac{1}{X}\right)$ est une symétrie. Déterminer ses éléments caractéristiques.
3. Montrer que si P est dans $R_n^-(\mathbb{C})$ alors 1 est racine de P et $\frac{P(X)}{X-1}$ est dans $R_{n-1}^+(\mathbb{C})$.
4. Montrer que si P est dans $R_n^+(\mathbb{C})$ et que n est impair alors -1 est racine de P et $\frac{P(X)}{X+1}$ est dans $R_{n-1}^+(\mathbb{C})$.

5. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n, tel que :

$$X^n + \frac{1}{X^n} = Q_n\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

6. En déduire que si P est dans $R_n^+(\mathbb{C})$ et que n est pair alors il existe un polynôme Q de degré $\frac{n}{2}$ vérifiant $P = X^{\frac{n}{2}} Q\left(X + \frac{1}{X}\right)$
7. A l'aide des questions précédentes, déterminer une façon de factoriser les polynômes réciproques de degré 5. Tester votre méthode en factorisant le polynôme :

$$12x^5 - 23x^4 - 135x^3 + 135x^2 + 23x - 12$$