Intégrales généralisées

Exercices de référence

Exercice R1 - Intégrales de Dirichlet.

Soit α dans $\mathbb{R}$. Notons :

$$D_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1. Soit β dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout α de $\mathbb{R}$, l'intégrale D_α est de même nature que :

$$S_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha} dt$$

   On pourra remarquer (aucune preuve demandée) et utiliser qu'on a, dans chaque question, un résultat similaire en remplaçant *sin* par *cos*.
2. Si $\alpha > 1$, montrer que D_α est absolument convergente.
3. Si $\alpha \in]0,1]$, montrer que :
   — D_α est convergente.
   — D_α n'est pas absolument convergente. On pourra utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$.
4. Si $\alpha \leq 0$, montrer que D_α est divergente. On pourra montrer que la suite (a_n) ne tend pas vers 0 avec :

$$a_n = \int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice R2.

Pour f et g dans $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, posons

$$(f/g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

1. Montrer que l'intégrale définissant $(\ldots/\ldots)$ converge.
2. Montrer que $(\ldots/\ldots)$ est un produit scalaire sur E.
3. Pourquoi $(\ldots/\ldots)$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice R3 - Calcul de l'intégrale de Gauss.

L'intégrale de Gauss est définie par :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. Montrer la convergence de I.
2. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que pour tous n de $\mathbb{N}^*$ et t de $[0,\sqrt{n}[$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

3. Posons $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

4. On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

Intégrales généralisées

Exercices du cours

Niveau 1

Exercice C1.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x)dx \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I_4 = \int_0^1 x\ln(x)dx \qquad I_5 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad I_6 = \int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$I_7 = \int_0^{\pi} \frac{1}{1-\sin(t)}dt \qquad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t}dt \qquad I_9 = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

$$I_{10} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt \qquad I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}}dx \qquad I_{12} = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$I_{13} = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}e^{-x}dx \qquad I_{14} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Exercice C2.

Déterminer la nature de la série : $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$

Exercice C3.

Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice C4.

1. Montrer que f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $x \mapsto f(x+a)$ est intégrable sur $]0;b-a]$

2. Soit a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $b > a$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que la fonction :

$$f_a(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

soit intégrable sur $[a, b[$.

Niveau 2

Exercice C5.

Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$$

Exercice C6.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ est convergente et qu'elle vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Niveau 3

Exercice C7.

Soient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt \qquad K = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt$$

1. Montrer que $L = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente. En déduire la convergence de I.
2. Grâce à un changement de variable, montrer que J est convergente. Quel rapport existe-t-il entre I et J ?
3. En calculant $I + J$, montrer que K est convergente et que $K = 2I$.
4. En déduire la valeur de I.

Intégrales généralisées

Exercices

" Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries que mobiliser sa connerie sur des choses intelligentes."

Les shadocks.

Niveau 1

Exercice 1.

Soient α dans $\mathbb{R}$. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t\sin(t)e^{-t} \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}dt \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}dt \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}}dx$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{t+\sin(t)}{t^3+\sin(t)}dt \qquad I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$$

$$I_{10} = \int_0^1 t\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt \qquad I_{11} = \int_2^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt \qquad I_{12} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

$$I_{13} = \int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt \qquad I_{14} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)\sin(t)dt \qquad I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(x)}{x^2}dx$$

Exercice 2.

Montrer que les intégrales suivantes convergent, puis les calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$$

Exercice 3.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Déterminer la nature de

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a\ln^b(x)}dx$$

Exercice 4.

Étudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}dx$

Niveau 2

Exercice 5.

Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \ln^n(t)dt$$

1. Montrer par récurrence que les intégrales I_n sont convergentes. En déduire une relation de récurrence sur les I_n.
2. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 6.

Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$

1. Montrer que si f converge en $+\infty$ alors f converge vers 0.
2. Montrer que f peut ne pas avoir de limite.
3. Si on suppose de plus f C^1 avec f' intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 7.

Pour a dans $\mathbb{R}_+^*$, notons :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$$

1. Montrer que I converge.
2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{a^2}{x}$, montrer que $I = \dfrac{\pi\ln(a)}{2a}$

Exercice 8.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$$

1. Montrer que I_n converge ssi $n \geq 1$.
2. Déterminer une relation de récurrence sur les I_n
3. Exprimer I_n en fonction de n.
4. Exprimer I_n en fonction d'une intégrale de Wallis.

Niveau 3

Exercice 9.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$
2. Montrer que pour tout x de $]0,1]$: $\frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$
3. Pour X dans $]0,1[$, montrer que : $\int_0^X \frac{x}{\ln(x)}dx = \int_0^{X^2} \frac{1}{\ln(x)}dx$
4. En déduire un encadrement de $\int_0^X \frac{x-1}{\ln(x)}dx$, puis que : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx = \ln(2)$.

Exercice 10.

Justifier l'existence puis calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctan(2x) - arctan(x)}{x}dx$$