2025-2026 | PSI

Devoir surveillé 4

Réduction - Probabilité - 4h

Exercice 1

Soit A dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $Tr(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer la liste des vp de A ainsi que leur multiplicité. En déduire une matrice D diagonale semblable à A.
3. Donner tous les polynômes annulateurs de A.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I.

Exercice 2

On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 3

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice d'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{O_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A.

Partie I - Généralités

Q1. Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. **Indication :** si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

Q5. Déterminer la matrice de φ_A dans la base $C = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Q6. En déduire les valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

Q7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

Q8. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

Q9. En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Q10. Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Q11. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A, puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

Q12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

Q13. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

Exercice 4

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettres a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$, qui modélise cette expérience et que l'on définit deux suites de variables aléatoires sur cet espace, $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$, décrivant les positions respectives des jetons A et B, en posant :

$X_0 = Y_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul, $X_n = 0$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, le jeton A se trouve dans C_0 et $X_n = 1$ s'il se trouve dans C_1; de même, $Y_n = 0$ si le jeton B est dans C_0 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération et $Y_n = 1$ s'il se trouve dans C_1.

I. Étude du mouvement du jeton A

1. **a)** Soit n un entier strictement positif. Déterminer la probabilité que, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0.

   b) Quelle est la probabilité que le jeton A reste indéfiniment dans C_0 ?

2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'intéresse à l'événement D_k : à l'issue de la $k^{\text{ième}}$ opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(D_k)$.

3. Soit M la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer les valeurs propres de M et donner une base de vecteurs propres.

   b) En déduire l'expression de M^n, pour tout entier n strictement positif.

4. **a)** Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X_1 = 0)$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1)$.

   b) Déterminer une matrice Q telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

   c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice Q^n et en déduire la loi de la variable X_n.

III. Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On suppose que l'on définit sur le même espace probabilisé une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geq 0}$, à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B, en posant :

$W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,

$W_n = 0$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0,

$W_n = 1$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve C_0 et B dans C_1,

$W_n = 2$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve C_1 et B dans C_0,

$W_n = 3$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1.

1. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(W_1 = i)$ pour i égal à $0, 1, 2$ et 3.

2. Déterminer la matrice R telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(W_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(W_{n+1} = 1) \\ \mathbf{P}(W_{n+1} = 2) \\ \mathbf{P}(W_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \mathbf{P}(W_n = 0) \\ \mathbf{P}(W_n = 1) \\ \mathbf{P}(W_n = 2) \\ \mathbf{P}(W_n = 3) \end{pmatrix}$$

3. On considère les matrices :
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer les matrices U^n et V^n.

   b) Établir, pour tout entier naturel non nul, l'égalité
$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \, U^{n-k} V^k$$
   où, par convention, on pose : $U^0 = V^0 = I$.

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'égalité

$$(U-V)^n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n]U + (-1)^n V^n$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice R^n et donner la loi de la variable W_n. (On distinguera les cas n pair et n impair).

Fin