

**Réduction des endomorphismes - 4h****Notations et rappels**

Dans tout le problème,  $n$  est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et la matrice colonne à  $n$  lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . L'élément nul de  $\mathbb{R}^n$  est noté  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre  $n$  est noté  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ . On désigne par  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$  et par  $0_n$  la matrice nulle d'ordre  $n$ .

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on appelle image de  $M$ , notée  $\mathrm{Im} M$  l'image de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $M$  et on appelle noyau de  $M$ , noté  $\mathrm{ker} M$ , le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $M^\top$  sa transposée,  $\det(M)$  son déterminant,  $\mathrm{rg}(M)$  son rang,  $\mathrm{tr}(M)$  sa trace,  $\chi_M$  son polynôme caractéristique et  $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On rappelle que  $M$  et  $M^\top$  ont le même rang et le même déterminant.

On note  $\mathcal{T}$  la transposition dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'application qui à toute matrice  $M$  associe  $M^\top$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  sont deux bases de  $\mathbb{R}^n$  et si  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\mathrm{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  la matrice dont, pour tout entier  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la  $j$ -ième colonne est formée des coordonnées du vecteur  $f(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Lorsque  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ , on simplifie la notation  $\mathrm{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  en  $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$  qui désigne la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$ , de l'endomorphisme  $f$ . On définit la suite des puissances de  $f$  en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si  $\Pi = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , on rappelle que  $\Pi(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k$ .

Lorsque  $M_1, \dots, M_k$  désignent des matrices carrées d'ordres respectifs  $n_1, \dots, n_k$ , on note  $\mathrm{diag}(M_1, \dots, M_k)$  la matrice carrée d'ordre  $n_1 + \dots + n_k$ , diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme  $\Phi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- conserve le rang si  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathrm{rg}(\Phi(M)) = \mathrm{rg}(M)$  ;
- conserve le déterminant si  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\det(\Phi(M)) = \det(M)$  ;
- conserve la trace si  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathrm{tr}(\Phi(M)) = \mathrm{tr}(M)$  ;
- conserve le polynôme caractéristique si  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$ .

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

## I Résultats préliminaires

**I.A** — On suppose que  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont trois bases de  $\mathbb{R}^n$  et que  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ .

**Q 1.** *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g) \mathrm{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f).$$

**Q 2.** En déduire qu'il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  appartenant à  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(f) = P \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f) Q.$$

**I.B** — On suppose que  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q 3.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $M$  et  $X$  un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $M^k X = \lambda^k X$ .

**Q 4.** En déduire que, si  $\Pi \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme annulateur de  $M$ , alors toute valeur propre complexe de  $M$  est une racine dans  $\mathbb{C}$  de  $\Pi$ .

## II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

### II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est noté  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\Gamma_A$  l'application

$$\Gamma_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$$

**Q 5.** Vérifier que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\Gamma_A$  appartient à  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

**Q 6.** Démontrer que, si  $A$  appartient à  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ , alors  $\Gamma_A$  conserve le rang.

**Q 7.** Démontrer que l'application

$$\Gamma : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A & \mapsto \Gamma_A \end{cases}$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie II.A,  $A$  est un élément fixé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q 8.** Démontrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$ .

**Q 9.** En déduire que, pour tout polynôme  $\Pi$  de  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi(\Gamma_A)$ .

**Q 10.** À l'aide du résultat précédent, démontrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\Gamma_A$  est diagonalisable.

**Q 11.** Démontrer que  $\chi_A$  est un polynôme annulateur de  $\Gamma_A$  et que  $\chi_{\Gamma_A}$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Q 12.** En déduire que  $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .

### II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices  $P$  et  $Q$  appartenant à  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ , on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto PMQ \end{cases}$$

$$\Psi_{P,Q} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto PM^{\top}Q \end{cases}$$

On admet que  $\Phi_{P,Q}$  et  $\Psi_{P,Q}$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P, Q) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^2 \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P, Q) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^2 \right\}.$$

**Q 13.** Démontrer que  $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall (\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \quad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

**II.B.1)** Soient  $P$  et  $Q$  deux matrices de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Q 14.** Montrer que  $\Phi_{P,Q}$  et  $\Psi_{P,Q}$  sont des automorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et préciser leurs applications réciproques.

**Q 15.** Montrer que  $\Phi_{P,Q}$  et  $\Psi_{P,Q}$  conservent le rang.

**Q 16.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  et  $Q$  pour que  $\Phi_{P,Q}$  et  $\Psi_{P,Q}$  conservent le déterminant.

**Q 17.** Montrer que  $\Phi_{P,P^{-1}}$  et  $\Psi_{P,P^{-1}}$  conservent le polynôme caractéristique.

**II.B.2)** Dans cette section, on prend  $n \geq 2$ .

**Q 18.** Montrer que  $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$  et  $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$ .

**Q 19.** En déduire que les ensembles  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont disjoints.

### III Endomorphismes de rang donné

On suppose que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Son noyau est noté  $\ker(f)$ .

**III.A** – On suppose dans cette sous-partie que  $f$  est un isomorphisme. On se donne une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{B}'$  la base

$$\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

**Q 20.** Déterminer  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .

**III.B** – On suppose dans cette sous-partie que  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul et que  $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

Soit  $\mathcal{B}_2$  une base de  $\ker(f)$ , que l'on complète (à gauche) en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Q 21.** Montrer que la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_k))$  est libre.

**Q 22.** Justifier que  $k < n$ .

On complète la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_k))$  en une base  $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_k), f_{k+1}, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Q 23.** Déterminer  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .

**III.C** – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note

$$J_{n,r} = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$$

en convenant que  $J_{n,n} = I_n$  et  $J_{0,n} = 0_n$ .

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$ .

**Q 24.** Montrer qu'il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$M = \Phi_{P,Q}(J_{n,r}).$$

**III.D** – On suppose dans cette sous-partie que  $n = 2$  et que  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de rang 1. On suppose que  $\text{Im } A$  et  $\text{Im } B$  sont distinctes.

**Q 25.** Montrer qu'il existe deux matrices  $P_2$  et  $Q_2$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \quad \text{et} \quad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels, non tous deux nuls.

### IV Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que  $n = 2$ .

On désigne par  $\mathcal{B}_{\text{ca}} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**IV.A** –

**Q 26.** Expliciter la matrice de la transposition  $\mathcal{T}$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Cette matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  sera notée  $T$ .

**Q 27.** Justifier sans calcul que  $T$  est diagonalisable

**Q 28.** Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\mathcal{T}$ .

On se donne deux éléments  $P$  et  $Q$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ ,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

**Q 29.** Montrer que la matrice, dans la base  $\mathcal{B}_{\text{ca}}$ , de l'endomorphisme  $\Phi_{P,Q}$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix},$$

où  $U$  est un élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à déterminer.

On suppose dans la suite de cette partie que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  conservant le rang.

**IV.B –**

**Q 30.** Montrer que  $\Phi$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Q 31.** Déterminer les rangs de  $\Phi(B_1)$ ,  $\Phi(B_4)$ ,  $\Phi(B_1 + B_4)$ . En déduire l'existence de deux matrices  $P_1$  et  $Q_1$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ , telles que :

$$\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels tels que  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ .

On adopte alors les notations suivantes :  $\Phi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi$ ,  $M' = M_{\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}}(\Phi')$ .

Pour tout  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B'_j = \Phi'(B_j)$  et  $C_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)^\top$  désigne la  $j$ -ième colonne de la matrice  $M'$ .

**Q 32.** Déterminer  $C_1$  et  $C_4$ .

**Q 33.** Démontrer que  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $a_i d_i - b_i c_i = 0$ .

**Q 34.** En considérant le rang des matrices  $B'_1 + B'_2$  et  $B'_1 + B'_3$ , démontrer que  $d_2 = d_3 = 0$ .

On déduit des deux questions précédentes que  $b_2 c_2 = b_3 c_3 = 0$ .

**IV.C –** On suppose dans cette sous-partie que  $c_2 = 0$ .

**Q 35.** En étudiant  $\det(M')$ , démontrer que les nombres  $b_2$ ,  $c_3$ ,  $d_4$  sont tous trois non nuls.

**Q 36.** En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices  $B'_3 + B'_4$ ,  $B'_2 + B'_4$  et  $B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4$ , démontrer que

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

avec  $c_4 = a_2 c_3$  et  $d_4 = b_2 c_3$ .

**Q 37.** En déduire que  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{L}_1$ .

**IV.D –** On suppose à présent que  $c_2 \neq 0$ .

**Q 38.** Démontrer que la matrice, dans la base  $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$ , de l'endomorphisme  $\Phi' \circ \mathcal{T}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

**Q 39.** Démontrer que  $c_3 = 0$ .

**Q 40.** En déduire que  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{L}_2$ .

On a ainsi démontré, pour  $n = 2$ , qu'un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  conserve le rang si et seulement s'il appartient à  $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ .

*On admet que ce résultat est encore valable lorsque  $n$  est un entier strictement supérieur à 2.*