Devoir surveillé 3

Séries numériques - Rappels espaces vectoriels - 4h

Exercice 1

Déterminer la nature des séries :

$$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \qquad \sum \frac{1}{n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} \qquad \sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \qquad \sum \sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 2

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Problème 1

On note C l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-1,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on note R l'espace des restrictions à $[-1,1]$ des polynômes de $\mathbf{R}[x]$ et on note R_k l'espace des restrictions à $[-1,1]$ des polynômes de $\mathbf{R}_k[x]$. Par abus, on appellera polynôme une fonction de R.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $t_n \in C$ par : pour tout $x \in [-1,1]$, $t_n(x) = \cos(n \text{ Arc } \cos\ x)$.

PARTIE I

1. Simplifier les expressions de t_0, t_1, t_2, t_3 et constater que ces fonctions ont des expressions polynomiales, que l'on explicitera.

2. Tracer, sur un même dessin, les graphes de t_0, t_1, t_2 et t_3. Préciser les racines et les extremums de chaque fonction.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\theta_k = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer les racines de la fonction t_n. Montrer que les racines de t_n sont deux à deux opposées.

4. On suppose l'entier $n \geq 2$. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.

4.1 Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k}$.

4.2 Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0$.

Pour $x \in [-1,1]$, le changement de variable bijectif $\theta = Arc \cos x$, permet d'écrire $t_n(x) = \cos(n\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

5. Pour $n \geq 1$, exprimer $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x)$ en fonction de x et de $t_n(x)$.

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction t_n est la restriction à l'intervalle $[-1,1]$ d'un polynôme T_n de $\mathbf{R}[x]$. Préciser le degré de T_n et le coefficient de son terme de plus haut degré.

7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme T_n n'a pas de racine complexe non réelle.

PARTIE II

1. Soit f une fonction de $\mathcal{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

2.1 Calculer I_0 et I_1.

2.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} (on pourra, entre autre méthode, utiliser le changement de variable $\theta = Arc \cos x$).

2.3 En déduire les valeurs de I_2 et I_4. Quelle est la valeur de I_{2p+1} pour $p \in \mathbf{N}$?

3. Définition d'une structure préhilbertienne réelle sur $\mathcal{C}$.

3.1 Montrer que l'application de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $\boldsymbol{R}$ définie par $(f,g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

3.2 Montrer que la famille de fonction t_p, pour $p \in [\![0, n]\!]$, est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathcal{R}_n$.
Calculer la norme de chaque fonction t_p.

3.3 Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\int_{-1}^{1} \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$.

4. On veut monter qu'il existe trois réels a_0, a_1, a_2 uniques, tels que pour tout polynôme $P \in R_5$, on a

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.1 On suppose que l'égalité (1) est satisfaite par tout $P \in R_5$. En prenant successivement les polynômes P définies par $P(x) = 1$, $P(x) = x$, $P(x) = x^2$, déterminer les réels a_0, a_1, a_2.

4.2 Montrer que le triplet (a_0, a_1, a_2) trouvé convient pour les polynômes P définies par $P(x) = x^4$ puis $P(x) = x^5$.

En déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout polynôme $P \in R_5$.

5. calcul d'une intégrale.

5.1 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

5.2 Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$, à l'aide du changement de variable $t = 2x - 1$ et de la formule (1).

Problème 2

si n est un entier naturel non nul on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Á toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k .$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

PARTIE I

Deux exemples

I.1/ Cas d'une suite constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha$.

I.1.1/Expliciter $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2/Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3/La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est –elle convergente ?

I.2/ Cas d'une suite géométrique.

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

I.2.1/Exprimer a_n^* en fonction de z et n .

I.2.2/On suppose que $|z|<1$.

I.2.2.1/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

I.2.2.2/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3/On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1/ Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

I.2.3.2/ Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3/ On suppose que $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

PARTIE II

Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$.

II.1/ Comparaison des convergences des deux suites.

II.1.1/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

II.1.1.1/ Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2/ En déduire la limite de $\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2/ Soient a une suite réelle et q un entier naturel fixé.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\dfrac{a_k}{2^n}$.

Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3/ On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;
Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4/ On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5/ La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$?

[…]

Fin