Devoir surveillé 6 - Version difficile

Séries numériques - 4h

Exercice

Notations

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, ce que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k,$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$

et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

À toute série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, de rayon de convergence $R > 0$, on associe sa somme f définie sur $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}\ ; |z| < R\}$ par

$$\forall z \in D(0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{C}^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ continue sur } I\},$$
$$\mathcal{C}_b^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ continue et bornée sur } I\}.$$

Lemme de Cesàro

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que
$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right). \tag{Cesàro}$$
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Applications

2. En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$. Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e_n = \alpha$. En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0,+\infty[$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab.$$

6. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k\right) = AB. \tag{Cauchy}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier une famille de séries particulières. Quelques premiers résultats sont établis dans les préliminaires. La partie 1 propose d'établir une expression des séries congruo-harmoniques alternées sous la forme d'une intégrale. La partie 2 propose de calculer la valeur de la somme de la série dans certains cas particuliers. La partie 3 s'intéresse à des calculs de probabilités relatifs aux choix des paramètres de la série. Enfin, la partie 4 se propose d'étudier la vitesse de convergence de ces séries.

Notations

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

— $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

— $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Si $z \in \mathbf{C}$, on notera $\overline{z}$ le conjugué de z.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ avec $a < b$, on pose $[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbf{N}$.

— Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

— Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on dit que p divise q et on note $p|q$, s'il existe un entier k tel que $q = kp$.

Définition 1 *Soit $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On appelle série* congruo-harmonique *de paramètres p et q, la série de terme général u_k défini pour tout $k \geq 0$ par*

$$u_k := u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk + q} \ ,$$

et l'on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série.

Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\phi_{p,q} : \begin{cases} \mathbf{N} \to & \mathbf{R} \\ n \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk + q} \end{cases} .$$

Préliminaires

1 $\triangleright$ Justifier que, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.

2 $\triangleright$ Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt.$$

3 $\triangleright$ En déduire la valeur de $S_{1,1}$.

4 $\triangleright$ Montrer alors que, pour tout $q \geq 2$,

$$S_{1,q} = (-1)^q \left(\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2\right).$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} := \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ par

$$I_{p,q}(t) := \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}dx.$$

5 $\triangleright$ Démontrer que l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

6 $\triangleright$ Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

7 $\triangleright$ Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^{\alpha_{p,q}})^k$ puis en déduire que

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}}dx + (-1)^n I_{p,q}(n)\right).$$

8 $\triangleright$ Montrer alors que, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt.$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

L'objectif de cette partie est de déterminer une formulation explicite de la somme de la série congruo-harmonique de paramètres p et q dans trois cas particuliers. On définit pour cela les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_1 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p = q\},\\
E_2 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p < q,\ p|q\},\\
E_3 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p > q\}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout couple $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ fixé, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) := \frac{X^{q-1}}{1+X^p}.$$

9 ▷ Montrer que, pour tout $(p,q) \in E_1$,

$$S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p}. \tag{F1}$$

10 ▷ Pour tout couple $(p,q) \in E_2$, montrer qu'il existe une constante $\lambda := \lambda(p,q)$ que l'on déterminera, telle que

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right). \tag{F2}$$

Dans le reste de la partie 2, on fixe un couple $(p,q) \in E_3$.

11 ▷ Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \ldots, b_{\lfloor p/2 \rfloor - 1}) \in \mathbf{C}^{\lfloor p/2 \rfloor + 1}$ telles que

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right),$$

où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie.

Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

12 ▷ Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, \lfloor p/2 \rfloor - 1]\!]$, b_k peut s'écrire sous la forme

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k},$$

où l'on a posé $\theta_k := (2k+1)\frac{\pi}{p}$.

13 ▷ En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbf{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

On admet que les F_k sont continues sur $[0,1]$ et que pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$\int_0^1 F_k(t)dt = \cos(q\theta_k) \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k).$$

14 ▷ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

15 ▷ Déduire des questions précédentes que, pour tout $(p,q) \in E_3$,

$$S_{p,q} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1}(p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1}\cos(q\theta_k)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right)\right). \qquad \text{(F3)}$$

16 ▷ En déduire les valeurs exactes de $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$.

3 Quelques calculs de probabilités

L'objectif de cette partie est d'évaluer la probabilité qu'un couple d'entier $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ pris au hasard appartienne au domaine d'application d'au moins l'une des formules (F1), (F2) et (F3) obtenues dans la partie 2.

On fixe pour cela $n \in \mathbf{N}^*$ et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers p et q selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1, n]\!]$. On définit alors les événements suivants, où E_1, E_2 et E_3 sont les trois ensembles définis dans la partie 2 :

E_n : " On obtient $(p,q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ".
A_n : " On obtient $p = q$ ".
B_n : " On obtient $q > p$ et q est divisible par p ".
C_n : " On obtient $p > q$ ".

17 ▷ Justifier que l'ensemble $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n.

18 $\triangleright$ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ puis $\mathbf{P}(C_n)$.

19 $\triangleright$ Montrer que

$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \frac{1}{n},$$

et en déduire $\mathbf{P}(A_n \cup B_n)$.

20 $\triangleright$ En notant $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique, montrer que

$$H_n \sim \ln n \qquad (n \to +\infty).$$

21 $\triangleright$ Montrer alors que

$$\mathbf{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \qquad (n \to +\infty).$$

22 $\triangleright$ En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(E_n).$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la vitesse de convergence des séries congruo-harmoniques. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente vers une limite réelle l telle que $u_n \neq l$ à partir d'un certain rang. On définit alors, sous réserve de convergence, la* vitesse de convergence *V de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par*

$$V = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right|.$$

On qualifie alors la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ selon la valeur de V :

— *Si $V = 0$: la convergence sera qualifiée de* supra-linéaire.

— *Si $V \in]0, 1[$: la convergence sera qualifiée de* linéaire.

— *Si $V = 1$: la convergence sera qualifiée d'*infra-linéaire.

On définit alors la vitesse de convergence d'une série comme étant celle de la suite de ses sommes partielles.

On définit enfin, pour tout $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, l'application $R_{p,q} := \frac{1}{q} I_{p,q}$ où $I_{p,q}$ est l'application définie dans la partie 1.

23 ▷ À l'aide du changement de variables $s = x^{n+1}$ dans $I_{p,q}(n)$, démontrer que

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \qquad (n \to +\infty).$$

24 ▷ En déduire la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée $\sum u_k$, c'est-à-dire celle de la suite des sommes partielles $(\phi_{p,q}(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

Fin du problème