2025-2026 PSI

Devoir surveillé 2

Intégrales généralisées - Algèbre linéaire - 4h

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1} dt$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales de Wallis W_n et l'intégrale de Gauss I par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^n(x) dx \qquad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. Calculer W_0 et W_1 puis montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$.
2. Montrer que (W_n) est une suite décroissante. En déduire que $W_n \sim W_{n+1}$.
3. Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x) dx$.
4. En déduire que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
5. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
6. Montrer la convergence de I.
7. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1 + x) \leq x$. En déduire que pour tous n de $\mathbb{N}^*$ et t de $[0, \sqrt{n}[$:
$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$
8. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,
$$\sqrt{n} W_{2n+1} \quad \leq \quad \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \quad \leq \quad \sqrt{n} W_{2n-2}$$
9. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3

Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, on note B_k le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad B_k(t) \quad = \quad \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k(1-t)^{n-k}$$

On note $\mathcal{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(B_0, B_1, ..., B_n)$. De plus, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $f_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P) \quad = \quad nXP \; + \; X(1-X)P' \qquad\qquad f_n(P) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k.$$

où P' est le polynôme dérivé de P

1. Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P)$ et $f_n(P)$ sont encore dans $\mathbb{R}_n[X]$
2. En déduire que φ_n et f_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Vérifier que, pour tout k de $[\![0,n]\!]$: $\varphi_n(B_k) = k\, B_k$.
4. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Déterminer la matrice de φ_n dans cette base.
6. Montrer que φ_n n'est pas bijectif.
7. Montrer que f_n est bijectif.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}$$

Soit n dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que l'intégrale :
$$I_n \quad = \quad \int_0^1 \frac{t^{2n}\ln(t)}{t^2-1} dt$$
est une intégrale généralisée convergente.
2. Calculer $I_{n+1} - I_n$.
3. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad = \quad I_0 \; - \; I_{n+1}$$
4. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}$$
5. Montrer que la fonction f définie sur $]0,1[$ par :
$$f(x) \quad = \quad \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$$
est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout x de $]0,1[$.
6. En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclure.

Exercice 5

Soients

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt \qquad K = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt$$

1. Montrer que $L = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente. En déduire la convergence de I.
2. Grâce à un changement de variable, montrer que J est convergente. Quel rapport existe-t-il entre I et J ?
3. En calculant $I + J$, montrer que K est convergente et que $K = 2I$.
4. En déduire la valeur de I.