2025-2026

Devoir surveillé 2 - Version difficile

PSI

Intégrales généralisées - Algèbre linéaire - 4h

Exercice 1

Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

On pourra utiliser que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Notons :
   $$I \;=\; \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$$
   Montrer que I est convergente.
2. Montrer que :
   $$I \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$$
3. Montrer que l'intégrale
   $$J_n \;=\; \int_0^{+\infty} xe^{-nx}dx$$
   est convergente pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Calculer sa valeur.
4. Pour tout x de $[0,1]$, posons :
   $$g(x) \;=\; \frac{x}{e^x-1}$$
   Montrer que pour tout x de $]0,1]$, on a : $0 \leq g(x) \leq 1$.
5. Montrer que :
   $$\sum_{k=1}^{n} J_k \;=\; I - \int_0^1 g(x)e^{-nx}dx$$
6. Conclure.

Exercice 2

Soient a et b des réels strictement positif. Posons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t}dt \qquad\qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)-\sin(bt)}{t}dt$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle \underset{\varepsilon\to 0}{lim} \int_\varepsilon^{\frac{b\varepsilon}{a}} \frac{\cos(at)}{t}dt \;=\; \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
3. En déduire la valeur de I.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}dt$ est convergente.
5. En déduire la valeur de J.
6. Déterminer les valeurs de :
   $$K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t}dt \qquad\qquad K_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\cos(bt)}{t}dt$$

Exercice 3

Partie I. Le lemme de Lebesgue Soit f dans $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. Posons :

$$I_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)dt$$

Le but de l'exercice est de montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer le résultat si f est C^1.
2. Montrer le résultat si f est une fonction en escaliers.
3. Montrer que toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. En déduire que l'expression suivante existe :
$$\|f\|_\infty = \underset{x\in[a,b]}{\text{Sup}} |f(x)|$$
4. On considère à présent f continue par morceaux. On rappelle (ou on admet) qu'il existe une suite (f_n) de fonctions en escaliers telle que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe g fonction en escaliers sur $[a,b]$ vérifiant :
$$\|f-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
5. Montrer que pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$:
$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right|$$
En déduire le lemme de Lebesgue. On admet que le résultat est identique en remplaçant cos par sin.

Partie II. Une application.

6. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
7. Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons :
$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx \qquad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx$$
Montrer que (J_n) est une suite constante. En déduire la valeur de J_n.
8. Montrer que $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$.
9. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4

Le but du problème est de montrer un théorème très récent (1984) dû à Mason sur les polynômes, dont l'un des corollaires important est la démonstration, pour les polynômes, du fameux grand théorème de Fermat.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on définit $n_0(P)$, le nombre de racines distinctes de P. Par exemple

$$n_0\left((X-1)^n\right) = 1 \qquad n_0((X-3)^2(X-2)) = 2$$

Le théorème de Mason est le suivant. Soit P, Q et R trois polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux vérifiant $P+Q=R$, alors :

$$Max(deg(P), deg(Q), deg(R)) \leq n_0(PQR) - 1$$

$\boxed{\text{Partie I. Préliminaires.}}$

Considérons, dans les préliminaires uniquement, des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $\mathbb{C}$ distincts et $\beta_1, \ldots, \beta_m$ d'autres complexes distincts. De plus définissons les polynômes

$$A = K_1 \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{a_i} \qquad \text{et} \qquad B = K_2 \prod_{i=1}^{m} (X - \beta_i)^{b_i}$$

avec $K_1,\ K_2 \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que $\dfrac{A'}{A} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - \alpha_i}$
2. En déduire que si $F = \dfrac{A}{B}$ alors $\dfrac{F'}{F} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - \alpha_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{X - \beta_i}$

Partie II. Le théorème de Mason.

Considérons donc trois polynômes P, Q et R

$$P = c_1 \prod_{i=1}^{l} (X - \lambda_i)^{p_i} \qquad Q = c_2 \prod_{i=1}^{m} (X - \mu_i)^{q_i} \qquad R = c_3 \prod_{i=1}^{n} (X - \nu_i)^{r_i}$$

trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

— Les λ_i (resp. μ_i et ν_i) sont distincts.
— P, Q et R sont premiers entre eux (i.e. les seuls polynômes divisant P, Q et R sont les constants).
— $P + Q = R$

Notons $F = \dfrac{P}{R}$ et $G = \dfrac{Q}{R}$ et F', G' leur dérivée.

3. Pourquoi les polynômes P, Q et R sont-ils premiers deux à deux ? En déduire que les λ_i, μ_i et ν_i sont tous différents.
4. Montrer que $F' + G' = 0$
5. En déduire que $\dfrac{Q}{P} = -\dfrac{\frac{F'}{F}}{\frac{G'}{G}}$
6. Soit N_0 le polynôme :
$$N_0 = \prod_{i=1}^{l} (X - \lambda_i) \prod_{i=1}^{m} (X - \mu_i) \prod_{i=1}^{n} (X - \nu_i)$$
Exprimer $deg(N_0)$ en fonction de P, Q, R et en utilisant la fonction n_0 définie en début de problème.
7. Montrer que $N_0 \dfrac{F'}{F}$ et $N_0 \dfrac{G'}{G}$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n_0(PQR) - 1$.
8. Montrer que Q divise $N_0 \dfrac{F'}{F}$ et que P divise $N_0 \dfrac{G'}{G}$
9. Conclure.

Partie III. Le grand théorème de Fermat pour les polynômes.

Soit S, T et U trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$S^n + T^n = U^n$$

On désire montrer que $n \leq 3$.

10. Montrer qu'il est suffisant de considérer les polynômes S, T, U premiers entre eux.
11. Montrer que :
$$\begin{cases} n.deg(S) & \leq & deg(S) + deg(T) + deg(U) - 1 \\ n.deg(T) & \leq & deg(S) + deg(T) + deg(U) - 1 \\ n.deg(U) & \leq & deg(S) + deg(T) + deg(U) - 1 \end{cases}$$
12. En déduire que $n < 3$