2025-2026 — Calculatrice interdite

Devoir surveillé 1

Algèbre linéaire

L'élite de ce pays permet de faire et défaire les modes, suivant la maxime qui proclame : "Je pense, donc tu suis."

P. Desproges

Exercice 1

Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ avec $\overrightarrow{u}(1,2,3,4)$, $\overrightarrow{v}(1,3,1,1)$ et $\overrightarrow{w}(1,2,4,4)$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. (u,v,w) avec $u_n = 2^n$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
3. $(P_0,\ldots,P_n)$ avec $P_k = (X+1)^k$ pour tout k de $\{0,\ldots,n\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Exprimer M en fonction de N et I. En déduire M^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. Développer $(I+N)(I-N+N^2)$. En déduire M^{-1}.

Exercice 3

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant le moins de calculs possibles, déterminer le rang, l'image et le noyau de A.

Exercice 4

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour tout M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soient

$$\begin{cases} F &= \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ G &= \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y,z \in \mathbb{R}\} \\ H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x = 2y - z, t = x + y + z\} \end{cases}$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Préciser pour chacun de ces sous-espaces vectoriel une base et sa dimension. Sont-ils en somme directe ?
2. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension

Exercice 6

Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. Considérons l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\varphi(P) \;=\; (P(a_0), \ldots, P(a_n))$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Montrer que φ est bijective.
3. Soient $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout i de $\{0, \ldots, n\}$, notons L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $L_i = \varphi^{-1}(e_{i+1})$. Déterminer pour tous i et j de $\{0, \ldots, n\}$ la valeur de $L_i(a_j)$.
4. En déduire toutes les racines de L_i avec leur multiplicité et une expression factorisée de L_i.
5. Montrer que la famille $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Déterminer les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base β.
7. En déduire que :
$$L_0 + L_1 + \ldots + L_n \;=\; 1$$

Exercice 7

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{mx}$ avec P un polynôme non nul sur $\mathbb{R}$ de degré n et m un réel non nul. Le but de l'exercice est de déterminer une méthode permettant de trouver une primitive de f.

Considérons l'application ϕ définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\;\; \phi(Q) \;=\; Q' + mQ$$

1. Montrer ϕ est une application linéaire.
2. Montrer que ϕ est injective. En déduire que ϕ est un isomorphisme.
3. En déduire qu'une primitive de f s'écrit sous la forme $Q(x)e^{mx}$ avec $deg(Q) = deg(P)$.
4. Calculer en utilisant la méthode précédente : $\displaystyle\int_0^1 x^5 e^x dx$

Exercice 8

Soit E une $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P = a_0 + a_1.X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P(u)$ l'endomorphisme :

$$P(u) = a_0 Id + a_1.u + \ldots + a_n u^n$$

où $u^k = u \, o \, u \, o \, \ldots \, o \, u$ (k fois). Enfin P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0$

1. Montrer que l'ensemble A des polynômes annulateurs de u est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que pour tout polynôme P, l'ensemble
$$(P) \;=\; \{PQ / Q \in \mathbb{R}[X]\}$$
est un sev de $\mathbb{R}[X]$
3. Considérons l'ensemble :
$$B \;=\; \left\{deg(P) \in \mathbb{N} \,/\, P \in A \setminus \{0\}\right\}$$
On admettra que B est non vide. Expliquer pourquoi B admet un minimum que l'on notera n_0.
4. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_0 dans A de degré n_0. On l'appelle le polynôme minimal de u. On rappelle qu'un polynôme est unitaire si et seulement si son coefficient dominant vaut 1.
5. Montrer que $(P_0) \subset A$.
6. Montrer que $A \subset (P_0)$.
7. En déduire l'unicité du polynôme minimal de u.