2025-2026 | **Devoir surveillé 4 - Version normale** | PSI

Correction - 4h

Exercice 1

$\boxed{1}$ D'après l'énoncé, le polynôme

$$P \;=\; X^3 - 3X^2 + 2X \;=\; X(X^2 - 3X + 2) \;=\; X(X-1)(X-2)$$

est un polynôme annulateur de A. Ainsi il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable.

$\boxed{2}$ Le polynôme $P \;=\; X(X-1)(X-2)$ étant annulateur, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Rac}(P) \;=\; \{0, 1, 2\}$$

De plus, A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre. On a donc :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$$

Notons μ_1 et μ_2 les multiplicités (éventuellement nulles) des valeurs propres 1 et 2. On a alors :

$$\begin{cases} 8 = 1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 = \mathrm{tr}(A) \\ 6 = \mu_1 + \mu_2 = \text{taille de } A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 4 \\ \mu_2 = 2 \end{cases}$$

Ainsi 1 et 2 sont les valeurs propres de A de multiplicité respective 4 et 2.

$\boxed{3}$ D'après la question 1, le polynôme $P = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi tout multiple de P est encore annulateur.

Inversement, montrons que si Q est un polynôme annulateur de A, alors c'est un multiple de P. Effectuons la division euclidienne de Q par P, on obtient :

$$Q \;=\; P \cdot Q_0 \;+\; aX + b$$

En évaluant en A, on trouve $aA + bI = 0$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors A admet un polynôme de degré 1 annulateur, ainsi A a une unique valeur propre. Absurde. Donc $(a, b) = (0, 0)$ et Q est un multiple de P.

Ainsi les polynômes annulateurs de A sont exactement les multiples du polynôme spectral. Le résultat reste vrai pour toute matrice diagonalisable avec une démonstration similaire.

$\boxed{4}$ Pour déterminer A^n, on effectue la division euclidienne de X^n par P. On obtient, puisque P est de degré 2 :

$$X^n \;=\; PQ \;+\; aX + b$$

avec Q dans $\mathbb{R}[X]$ et (a, b) dans $\mathbb{R}^2$. En évaluant en 1 et 2, on trouve :

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Enfin, en évaluant en A, on trouve :

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$

Exercice 2

Cf TD

Exercice 3

Partie I – Généralités

Q1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Puisque le produit de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est bien défini, et est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, φ_A est correctement définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
De plus, pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N)$$

φ est donc une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\varphi_A \circ \varphi_B(M) = \varphi_A(\varphi_B(M)) = \varphi_A(BM) = A(BM) = (AB)M = \varphi_{AB}(M),$$

et donc $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3.
- Si A est inversible, alors, d'après **Q2.**, $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, et, de même, $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
  Par conséquent, φ_A est bijective, et sa réciproque est $\varphi_{A^{-1}}$.
- Réciproquement, supposons $\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ bijective.
  En particulier, la matrice I_n possède un unique antécédent par φ_A : il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi_A(B) = \mathrm{I}_n$. Cette dernière égalité se récrit $AB = \mathrm{I}_n$, ce qui justifie que A est inversible (et que B est son inverse).

Partie II – Étude d'un exemple

Q4. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-a \end{vmatrix} = (X-1)(X-a)$, donc deux situations se présentent :
- si $a \neq 1$, alors A possède exactement deux valeurs propres distinctes (à savoir a et 1), et puisque $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, A est diagonalisable ;
- si $a = 1$, alors A possède 1 pour unique valeur propre, et si A était diagonalisable, alors il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_2$.
  Puisque $A \neq \mathrm{I}_2$, cette conclusion est fausse, et A ne peut donc pas être diagonalisable lorsque $a = 1$.

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Q5. On calcule les images des éléments de $\mathcal{C}$ par φ :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

et on en déduit que $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Q6. Puisque la matrice précédente est triangulaire supérieure, on montre rapidement que $\chi_{\varphi_A} = (X-1)^2(X-a)^2$, et donc $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{1, a\}$.

De plus, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (quelle que soit la valeur de a), donc, par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) - \mathrm{rg}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = 2$.

De même, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})) = 2$.

Q7. --→ Si $a \neq 1$, φ_A possède deux valeurs propres distinctes, à savoir 1 et a, et puisque $\dim(E_1(\varphi_A)) + \dim(E_a(\varphi_A)) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$, φ_A est diagonalisable.

--→ Si $a = 1$, alors φ_A possède 1 pour unique valeur propre, et comme $\dim(E_1(\varphi_A)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$, φ_A n'est pas diagonalisable.

Finalement, φ_A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Partie III – Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Q8. On a vu en **Q2.** que, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
En particulier, $\varphi_A^2 = \varphi_{A^2}$.
On en déduit rapidement, par récurrence, que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.
Par ailleurs, $\varphi_{A^0} = \varphi_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} = \varphi_A^0$: l'égalité ci-dessus demeure donc vraie lorsque $k = 0$.

Q9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$: il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$.

Pour toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$[P(\varphi_A)](M) = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_A^k\right](M) = \left[\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}\right](M)}_{\text{d'après } \mathbf{Q8.}} = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) M = \varphi_{P(A)}(M)$$

On a ainsi montré que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Q10. Une matrice (resp. un endomorphisme) est diagonalisable si et seulement si elle (resp. il) possède un polynôme annulateur scindé dont les racines sont toutes simples.

--→ Si A est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé dont les racines sont toutes simples tel que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Par conséquent, $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$: φ_A possède donc un polynôme annulateur dont les racines sont toutes simples (à savoir P) : φ_A est donc diagonalisable.

--→ Réciproquement, supposons φ_A diagonalisable : il existe donc un polynôme P scindé dont les racines sont toutes simples tel que $P(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et donc $\varphi_{P(A)} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$.
Par conséquent, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P(A) \times M = 0$. Cette égalité étant valable, en particulier, pour $M = \mathrm{I}_n$, on en déduit que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$: A possède donc un polynôme annulateur dont les racines sont toutes simples (à savoir P), et donc A est diagonalisable.

Q11. D'après **Q9.**, $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{\chi_A(A)}$.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Donc $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$.
Ainsi, χ_A est un polynôme annulateur de φ_A : on en déduit que les valeurs propres de φ_A sont parmi les racines de χ_A, qui sont les valeurs propres de A. Autrement dit, $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.
D'autre part, toujours par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et, d'après **Q9.**, $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = \varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)}$.
Par conséquent, $\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et, en raisonnant comme à la fin de la question **Q10.**, on en déduit que $\chi_{\varphi_A}(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, puis, comme dans la démarche ci-dessus, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.
Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

Q12. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M, de sorte que l'on peut écrire par blocs : $M = (C_1 \cdots C_n)$.

$$\begin{aligned}
M \in E_\lambda(\varphi_A) &\iff \varphi_A(M) = \lambda M \\
&\iff AM = \lambda M \\
&\iff A \times (C_1 \cdots C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\
&\iff (A \times C_1 \cdots A \times C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\
&\iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], A \times C_k = \lambda C_k \\
&\iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], C_k \in E_\lambda(A)
\end{aligned}$$

Q13. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (deux à deux distinctes), de A, et $r_1, \ldots, r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Puisque A est diagonalisable, $\operatorname{tr}(A)=\sum\limits_{k=1}^{p} r_k\lambda_k$ et $\det(A)=\prod\limits_{k=1}^{p}\lambda_k^{r_k}$.

D'après **Q10.**, la diagonalisabilité de A garantit celle de φ_A, si bien que la trace de φ_A est la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) et le déterminant de φ_A est le produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

Dans les deux phrases précédentes, la trigonalisabilité suffisait, et celle-ci est acquise, puisqu'on travaille dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

De plus, d'après **Q11.**, $\mathrm{Sp}(\varphi_A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ et, d'après la remarque qui suit la question **Q12.**, pour tout $k\in[\![1\,;p]\!]$, les espaces $E_{\lambda_k}(\varphi_A)$ et $E_{\lambda_k}(A)^n$ sont isomorphes, donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A))=\dim\left(E_{\lambda_k}(A)^n\right)=n\dim(E_{\lambda_k}(A))$.
Puisque A est diagonalisable, pour tout $k\in[\![1\,;p]\!]$, $\dim(E_{\lambda_k}(A))=r_k$, et donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A))=nr_k$.

Par conséquent, $\operatorname{tr}(\varphi_A)=\sum\limits_{k=1}^{p} nr_k\lambda_k=n\sum\limits_{k=1}^{p} r_k\lambda_k=n\operatorname{tr}(A)$ et $\det(\varphi_A)=\prod\limits_{k=1}^{p}\lambda_k^{nr_k}=\left(\prod\limits_{k=1}^{p}\lambda_k^{r_k}\right)^n=\det(A)^n$.

Exercice 4

1. (a) Soit $A0_n$ l'événement "à l'issue de la $n^{ième}$ opération, le jeton A n'a jamais quitté C_0" et pour tout n, a_n l'événeent "obtenir la lettre a au $n^{ième}$ tirage".
   Si A n'a jamais quitté C_0, c'est que l'on a jamais obtenu la lettre a. Donc
   $A0_n=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{a_k}$ événements indépendants donc $p(A0_n)=\prod_{k=1}^{n}p\left(\overline{a_k}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ car les lettres sont équiprobables.

   (b) De même $A0_\infty=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{a_k}$ et $p\left(A0_\infty\right)=\lim_{n\longrightarrow\infty}p\left(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{a_k}\right)=0$ car $\left|\frac{2}{3}\right|<1$.

2. Si à l'issue de la $k^{ième}$ opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0 c'est qu'il en était parti plus tôt. Donc $D_k=$ (un seul a avant le $k-1^{ème}$) et a_k Or le nombre de a lors des $k-1$ premisers tirages suit une loi binômiale de paramètre $k-1$ et $\frac{1}{3}$ car les tirages de lettre sont indépendants. Donc

$$p\left(D_k\right)=C_{k-1}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\frac{1}{3}=(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$

3. Soit M la matrice

$$M=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

   (a) Soit α un réel et $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ une matrice colonne.

$$(E)\ (M-\alpha I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll}(2-\alpha)x & +y & =0\\ x & +(2-\alpha)y & =0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll}-(2-\alpha)^2y & +y & =0\\ x & & =-(2-\alpha)y\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}(-\alpha^2+4\alpha-3)y & =0\\ x & =-(2-\alpha)y\end{array}\right.$$

   On détermine donc les racines de $-\alpha^2+4\alpha-3=0$ ($2°$ degré) à savoir $\alpha=1$ ou 3.
   - Donc si $\alpha\neq1$ et 3, $(E)\Leftrightarrow(x=0$ et $y=0)$ et α n'est pas valeur propre.
   - Si $\alpha=1$, $(E)\Leftrightarrow x=-y$ et 1 est une valeur dont le sous espace propre associée est $Vect\left((1,-1)\right)$.
   - Si $\alpha=3$, $(E)\Leftrightarrow x=y$ et 3 est une valeur dont le sous espace propre associée est $Vect\left((1,1)\right)$.

   On a en dimension 2, deux sous espace propres de dimension 1 et 1. Donc $(1,-1)$ et $(1,1)$ est une base de vecteurs propres.

   (b) Donc, avec $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ on a $M=P.D.P^{-1}$ et $M^n=P.D^n.P^{-1}$.
   On calcule P^{-1} (P est inversible car c'est la matrice des coordonnées d'une base)
   $\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\L2+L1\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&2&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}L1-L2/2\\L2/2\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&-1/2\\0&1&1/2&1/2\end{array}\right)\begin{array}{c}L1-L2/2\\L2/2\end{array}$
   Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$
   Et $M^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1\\3^n&3^n\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&1+3^n\end{pmatrix}$

4. (a) $p(X_1=0)=p(A \text{ ne change pas de case})=p(a_1)=\frac{1}{3}$ et $p(X_1=1)=1-p(X_1=0)=\frac{2}{3}$. (contraire)

(b) $(X_n=0, X_n=1)$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(X_{n+1}=0) &= p(X_{n+1}=0/X_n=0).p(X_n=0)+p(X_{n+1}=0/X_n=1).p(X_n=1)\\ &= p(\text{ne change pas}).p(X_n=0)+p(\text{change}).p(X_n=1)\\ &= \frac{1}{3}p(X_n=0)+\frac{2}{3}.p(X_n=1)\end{aligned}$$

et de la même façon, $p(X_{n+1}=1)=\frac{2}{3}p(X_n=0)+\frac{1}{3}.p(X_n=1)$ donc

$$\begin{pmatrix} p(X_{n+1}=0)\\ p(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}p(X_n=0)+\frac{2}{3}.p(X_n=1)\\ \frac{2}{3}p(X_n=0)+\frac{1}{3}.p(X_n=1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}p(X_n=0)\\ p(X_n=1)\end{pmatrix}$$

donc $Q=\frac{1}{3}M$ convient.

(c) On a donc $Q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n M^n$ et comme $\begin{pmatrix}p(X_n=0)\\ p(X_n=1)\end{pmatrix}$ est une suite matricielle de raison Q,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}p(X_n=0)\\ p(X_n=1)\end{pmatrix} &= Q^n\begin{pmatrix}p(X_0=0)\\ p(X_0=1)\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}\right)^n M^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & -1+3^n\\ -1+3^n & 1+3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\\ -\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalement, $p(X_n=0)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right)$ et $p(X_n=1)=\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right)$

II Etude d'un mouvement du couple de jetons (A,B)

1. $p(W_1=0)=p(\text{rien ne bouge})=p(c_1)=\frac{1}{3}$,
$p(W_1=1)=p(B \text{ change de case})=p(b_1)=\frac{1}{3}$,
$p(W_1=2)=p(A \text{ change de case})=p(a_1)=\frac{1}{3}$ et
$p(W_1=3)=p(A \text{ et } B \text{ change de case})=p(\text{impossible})=0$
2. $(W_n=0, W_n=1, W_n=2, W_n=3)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(W_{n+1}=0) &= p(W_{n+1}=0/W_n=0).p(W_n=0)+p(W_{n+1}=0/W_n=1).p(W_n=1)\\ &\quad +p(W_{n+1}=0/W_n=2).p(W_n=2)+p(W_{n+1}=0/W_n=3).p(W_n=3)\\ &= p(\text{rien ne change}).p(W_n=0)+p(\text{B change}).p(W_n=1)\\ &\quad +p(\text{A change}).p(W_n=2)+p(\text{Les deux changent}).p(W_n=3)\\ &= \frac{1}{3}.p(W_n=0)+\frac{1}{3}.p(W_n=1)+\frac{1}{3}.p(W_n=2)+0.p(W_n=3)\end{aligned}$$

et on trouve de la mâme façon,

$$\begin{aligned} p(W_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}.p(W_n=0)+\frac{1}{3}.p(W_n=1)+0.p(W_n=2)+\frac{1}{3}.p(W_n=3)\\ p(W_{n+1}=2) &= \frac{1}{3}.p(W_n=0)+0.p(W_n=1)+\frac{1}{3}.p(W_n=2)+\frac{1}{3}.p(W_n=3)\\ p(W_{n+1}=3) &= 0.p(W_n=0)+\frac{1}{3}.p(W_n=1)+\frac{1}{3}.p(W_n=2)+\frac{1}{3}.p(W_n=3)\end{aligned}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}p(W_{n+1}=0)\\ p(W_{n+1}=1)\\ p(W_{n+1}=2)\\ p(W_{n+1}=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}.p(W_n=0)+\frac{1}{3}.p(W_n=1)+\frac{1}{3}.p(W_n=2)+0.p(W_n=3)\\ \frac{1}{3}.p(W_n=0)+\frac{1}{3}.p(W_n=1)+0.p(W_n=2)+\frac{1}{3}.p(W_n=3)\\ \frac{1}{3}.p(W_n=0)+0.p(W_n=1)+\frac{1}{3}.p(W_n=2)+\frac{1}{3}.p(W_n=3)\\ 0.p(W_n=0)+\frac{1}{3}.p(W_n=1)+\frac{1}{3}.p(W_n=2)+\frac{1}{3}.p(W_n=3)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} \text{ donc } R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $R = \frac{1}{3}(U-V)$ avec U et V les matrices ci-dessous.

3. (a) On touve $U^2 = 4U$ d'où par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $U^n = 4^{n-1}U$ et $U^0 = I$.
   On trouve $V^2 = I$ d'où (sans récurrence), si n est pair, $V^n = (V^2)^{n/2} = I$ et si n est impair, $V^n = V$.

   (b) On a $V.U = U = U.V$, donc d'après la formule du binôme,

$$(U-V)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k U^{n-k}(-V)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k$$

   (c) On pourrait (sans déduire) démontreer le résultat par récurrence.

$$\begin{aligned}
(U-V)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k + (-1)^n C_n^n U^0 V^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k 4^{n-k-1} U.V^k + (-1)^n V^n \text{ et comme } V^k = V \text{ ou } I \text{ et } U.V = U \text{ et } U.I = U \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k 4^{n-k-1} U + (-1)^n V^n = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 4^{n-k} - (-1)^n C_n^n 4^0\right) U + (-1)^n V^n \\
&= \frac{1}{4}\left((-1+4)^n - (-1)^n\right) U + (-1)^n V^n
\end{aligned}$$

   et on touve bien $(U-V)^n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n] U + (-1)^n V^n$ (qui est aussi valable pour $n = 0$)

4. On a donc pour n pair, $(U-V)^n = \frac{1}{4}(3^n - 1) U + I$ et pour n impair, $(U-V)^n = \frac{1}{4}[3^n + 1] U - V$.
   Comme $R^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (U-V)^n$, on a pour n pair :

$$\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{4}(3^n-1) U + I\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3^n+3 \\ 3^n-1 \\ 3^n-1 \\ 3^n-1 \end{pmatrix}$$

   et si n est impair

$$\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{4}(3^n+1) U - V\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3^n+1 \\ 3^n+1 \\ 3^n+1 \\ 3^n-3 \end{pmatrix}$$