2025-2026 **Devoir surveillé 4 - Version difficile** PSI

Correction - 4h

1. Notons déjà que le produit est bien défini, toutes les matrices étant de taille $n \times n$. Notons

$$N = M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g), \quad M = M_{\varepsilon,\mathcal{F}}(f), \quad P = M_{\varepsilon,\mathcal{G}}(g \circ f)$$

Il s'agit de montrer que $P = NM$. Pour ça nommons les vecteurs des bases

$$\varepsilon = (u_1, \dots, u_n), \quad \mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n), \quad \mathcal{G} = (w_1, \dots, w_n)$$

D'une part, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(u_j) &= g\left(f\left(u_j\right)\right) \\
&= g\left(\sum_{k=1}^{n} M_{kj} v_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_{kj} g(v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_{kj} \left(\sum_{i=1}^{n} N_{ik} w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} N_{ik} M_{kj}\right) w_i
\end{aligned}$$

D'autre part par définition de P on a pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$(g \circ f)(u_j) = \sum_{k=1}^{n} P_{ij} w_i$$

Ainsi par unicité de la décomposition dans $\mathcal{G}$ on récupère pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} N_{ik} M_{kj}$$

ce qui est la définition de

$$P = NM$$

2. Grâce à la question précédente il suffit de prendre

$$P = M_{\varepsilon,\mathcal{G}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}), Q = M_{\mathcal{F},\varepsilon}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$$

[Mais faut-il préciser pourquoi ces matrices sont bien inversibles ?]

3. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$ car $M^0 X = I_n X = X = \lambda^0 X$. Supposons le résultat pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $M^{k+1} X = M M^k X = M \lambda^k X = \lambda^k M X = \lambda^k \lambda X = \lambda^{k+1} X$. On conclut par principe de récurrence. L'avant-dernière égalité est justifiée par le fait que λ est valeur propre de M associée à X.

4. Soit $\Pi = \sum_{k=1}^{r} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de M et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a alors

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = \sum_{k=0}^{r} a_k M^k$$

On multiplie à droite par un vecteur propre Y associé à λ et on obtient

$$0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=0}^{r} a_k M^k Y = \sum_{k=0}^{r} a_k \lambda^k Y = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k \lambda^k\right) Y$$

Comme $Y \neq 0$ on obtient bien que $\Pi(\lambda) = 0$.

5. C'est une conséquence directe de la bilinéarité du produit matriciel : la multiplication par A à gauche est une opération linéaire.

6. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par le cours, on sait que le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un isomorphisme. Pour obtenir le résultat demandé, il suffit de passer aux applications linéaires canoniquement associées. Notons f l'application linéaire canoniquement associée à A et u celle associée à M. On sait alors que f est un isomorphisme ce qui donne

$$\mathrm{rg}\,(f \circ u) = \mathrm{rg}(u)$$

donc

$$\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$$

7.
   - Linéarité : soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda A + \mu B} &= (M \mapsto (\lambda A + \mu B)\, M)\\ &= (M \mapsto \lambda AM + \mu BM)\\ &= \lambda\,(M \mapsto AM) + \mu\,(M \mapsto BM)\\ &= \lambda \Gamma_A + \mu \Gamma_B\end{aligned}$$

   à nouveau par bilinéarité du produit matriciel.

   - Injectivité : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\Gamma_A = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\; AM = 0 \;\Leftrightarrow A = 0$$

   Pour la dernière équivalence, le sens $\Leftarrow$ est immédiat et le sens $\Rightarrow$ est obtenu en choisissant $M = I_n$.

8. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$ car $\Gamma_{A^0} = \Gamma_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = (\Gamma_A)^0$. Supposons le résultat pour un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma_{A^{k+1}} &= (M \mapsto A^{k+1} M)\\ &= (M \mapsto A(A^k M))\\ &= \Gamma_A \circ \Gamma_{A^k}\\ &= \Gamma_A \circ (\Gamma_A)^k \quad \text{par hypothèse de récurence}\\ &= (\Gamma_A)^{k+1}\end{aligned}$$

On conclut par principe de récurrence.

9. La question précédente montre que cette relation est vraie pour tout monôme Π. La linéarité de Γ permet d'étendre le résulat à toute combinaison linéaire de monômes, c'est-à-dire à tout polynôme.

10. Supposons A diagonalisable. Alors elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P. On a alors $P(\Gamma_A) = \Gamma_{P(A)} = \Gamma_{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$ donc P annule Γ_A donc Γ_A est aussi diagonalisable. Réciproquement si Γ_A est diagonalisable, alors il admet un polynôme annulateur Q scindé à racines simples et alors $\Gamma_{Q(A)} = Q(\Gamma_A) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$ donc par injectivité de Γ, on a $Q(A) = 0$ donc A est diagonalisable.

11. On utilise les deux calculs de la question précédente en remplaçant P par χ_A et Q par χ_{Γ_A} et on utilise le théorème de Cailey-Hamilton.
12. On procède par double inclusion.
    - $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$: si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de Γ_A alors par 4. elle est racine de tout polynôme annulateur de Γ_A, en particulier, par la question précédente, de χ_A, et donc valeur propre de A.
    - $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) \supset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$: si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors par 4. elle est racine de tout polynôme annulateur de A, en particulier, par la question précédente, de χ_{Γ_A}, et donc valeur propre de Γ_A.
13. Soit $(\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2$. Suppsons pour commencer que $\Theta \in \mathcal{L}_1$ et $\Theta' \in \mathcal{L}_2$. On a alors $\Theta = \Phi_{P,Q}$ et $\Theta' = \Psi_{R,S}$ pour certaines matrices inversibles $P, Q, R, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$\Theta \circ \Theta' = M \mapsto P(RM^\top S)Q = (PR)M^\top(SQ) = \psi_{PR,SQ} \in \mathcal{L}_2$$

car PR et SQ sont inversibles comme produit de matrices inversibles. Les trois autres cas sont similaires, selon ou non qu'il y ait transposition, on retombera toujours dans $\mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$.
14. On constate que

$$\Phi_{P,Q} \circ \Phi_{P^{-1},Q^{-1}} = (M \mapsto P(P^{-1}MQ^{-1})Q) = (M \mapsto M) = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

ce qui prouve (pour un endomorphisme en dimension finie, l'inversibilité d'un seul côté suffit à être inversible) que

$\Phi_{P,Q}$ est un automorphisme et sa réciproque est $\Phi_{P^{-1},Q^{-1}}$

De même

$$\Psi_{P,Q} \circ \Psi_{P^{-1},Q^{-1}} = (M \mapsto P(P^{-1}M^\top Q^{-1})Q) = (M \mapsto M^\top) = \mathcal{T}$$

or $\mathcal{T}$ est un automorphisme de réciproque lui-même donc

si $_{P,Q}$ est un automorphisme et sa réciproque est $\mathcal{T} \circ \Psi_{P^{-1},Q^{-1}}$

15. Cf. 6, la composition à gauche mais aussi à droite, par un isomorphisme, préserve le rang. Il suffit donc de reprendre la démonstration en 6. et de composer en plus à droite par l'isomorphisme canoniquement associé à Q, et éventuellement par la transposition, qui est aussi un isomorphisme.
16. Comme pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(M^\top) = \det(M)$, alors $\det(PM^\top Q) = \det(P)\det(M)\det(Q) = \det(M)$ si et seulement si $\det(P)\det(Q) = 1$. De même pour $\det(PMQ)$. On propose donc la condition nécéssaire et suffisante

$$\det(PQ) = 1$$

17. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, PMP^{-1} est semblable à M et de $PM^\top P^{-1}$ à $M^\top$ donc à M. Toutes ces matrices ont donc même polynôme caractéristique, ce qui prouve que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.
18. $\mathcal{T} = \Psi_{I_n,I_n} \in \mathcal{L}_2$. En revanche $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$ car si c'était le cas il existerait $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$PMQ = M^\top$$

donc en prenant $M = I_n$ on obtient $Q = P^{-1}$ donc

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ PMP^{-1} = M^\top$$

Prenons $M = E_{21}$ (matrice élémentaire). On obtient alors $PE_{2,1} = E_{1,2}P$. On obtient donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(PE_{12})_{ij} = (E_{21}P)_{ij}$$

Avec la formule du produit matriciel on obtient

$$(PE_{12})_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq 2 \\ P_{i1} \text{ si } j = 2 \end{cases} \quad , \quad (E_{21}P)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq 2 \\ P_{1j} \text{ si } i = 2 \end{cases}$$

Ceci prouve que $P_{1j} = (E_{21}P)_{2j} = (PE_{12})_{2j} = 0$ si $j \neq 2$. De même $P_{i1} = 0$ si $i \neq 2$.
On recommence avec $M = E_{11}$ cette fois pour obtenir que $P_{i1} = 0$ si $i \neq 1$ et $P_{1j} = 0$ si $j \neq 1$, en particulier $P_{21} = P_{12} = 0$. On vient de prouver que la première ligne et la première colonne de P sont nulles. C'est impossible car P est supposée inversible.

19. Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Alors il existe $P, Q, R, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$PMQ = RM^\top S^{-1}$$
donc
$$M^\top = R^{-1}PMQS$$
ce qui prouverait que $\mathcal{T} = \Phi_{R^{-1}P,QS} \in \mathcal{L}_1$ ce qui est impossible par la question précédente.
20. Par construction, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n$.
21. Notons que sous l'hypothèse de l'énoncé, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ est (par construction) un supplémentaire de $\ker(f)$. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des scalaires tels que
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i) = 0$$
Notons qu'alors par linéarité de f on a
$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = 0$$
ce qui prouve que le vecteur $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ est dans le noyau de f. Mais par ailleurs, il est dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ qui est un supplémentaire dudit noyau. Ce vecteur est donc nul, et par liberté de la famille $(e_1, \cdots, e_k)$, les scalaires λ_i sont tous nuls. C'est exactement ce qu'on voulait démontrer.
22. Notons qu'on a déjà $k \leqslant n$, car k est la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $k = n$. Alors $\mathcal{B}_2 = \varnothing$, donc le noyau de f est nul. C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc $k < n$.
23. Par construction, il s'agit de la matrice $J_{n,r}$ définie juste après (...).
24. Soit f l'application canoniquement associée à M de rang $r \in [\![0, n]\!]$ (on notera $\mathcal{B}_{can}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Distinguons trois cas :
    - Si f est nulle, M est nulle et n'importe quel couple (P, Q) de matrices inversibles convient.
    - Si f est un isomorphisme, ce qui signifie que (f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie) $\ker(f) = \{0\}$ et $r = n$, la partie III-A montre qu'il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n = J_{n,n}$; d'après Q2, il existe deux matrices P_2, Q_2 inversibles telles que $J_{n,n} = P_2MQ_2$, donc $M = \Phi_{P_2^{-1},Q_2^{-1}}(J_{n,n})$.
    - Enfin, si on n'est dans aucun des deux cas précédents, $r \in [|1, n-1|]$ et on est dans la situation de la partie III-B. Le résultat de Q23 donne alors deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = J_{n,r}$; on conclut pareillement en utilisant Q2.
25. Prenons une base
$$B_1 = (U_1, U_2)$$
de $\mathbb{R}^2$ avec U_2 un vecteur qui dirige $\mathrm{Ker}(A)$. Ceci existe car $\mathrm{Ker}(A)$ est une droite vectorielle, et donc dans $\mathbb{R}^2$ tout supplémentaire en est une droite vectorielle aussi. Prenons
$$B_2 = (AU_1, V_2)$$
avec V_2 qui dirige $\mathrm{Im}(B)$. On a B_2 qui est une base de $\mathbb{R}^2$ car $AU_1 \in \mathrm{Im}(A)$ et $AU_1 \neq 0$ car $U_1 \notin \mathrm{Ker}(A)$ (puisque (B_1) est une base de $\mathbb{R}^2$) et $V_2 \in \mathrm{Im}(B)$, or $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$ sont des droites vectorielles distinctes *donc* (comme ce sont des droites) en somme directe, donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Alors en posant $Q_2 = \mathrm{M}_{B_{can},B_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $P_2 = \mathrm{M}_{B_2,B_{can}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ (matrices de passage) on a le résultat désiré.

26. Par construction, $B_1^T = B_1, B_4^T = B_4, B_2^T = B_3, B_3^T = B_2$. Donc :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

27. T est symétrique réelle ; en vertu du théorème spectral, elle est donc diagonalisable.
28. Supposons que $\mathcal{T}(M) = \lambda M$ pour un scalaire λ et une matrice non nulle M. En spécialisant sur les coefficients, on trouve que $m_{ii} = \lambda m_{ii}$ pour tout $i \in [|1, n|]$ et $m_{ij} = \lambda m_{ji}$ pour $i, j \in [|1, n|]$ distincts, donc $m_{ij} = \lambda^2 m_{ij}$. Comme au moins un des coefficients de M est non nul, on trouve sur ce coefficient que $\lambda^2 = 1$ donc que $\lambda \in \{1, -1\}$. La recherche des sous-espaces propres se fait directement : par construction, le sous-espace propre associé à 1 est l'espace des matrices symétriques et celui associé à -1 est celui des matrices antisymétriques. (Ce raisonnement est valable y compris si $n \neq 2$.)
29. Calcul plus ou moins pénible à l'appui (il y a sûrement moyen de rendre ça facile), on trouve le résultat voulu avec $U = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = Q$.
30. Comme Φ préserve le rang, on a notamment que l'image d'une matrice non nulle (donc de rang non nul) est non nulle ; ainsi, le noyau de Φ est l'espace nul, ce qui (Φ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie) entraîne que Φ est bijectif, donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
31. B_1 et B_4 sont de rang 1, leurs images par Φ le sont donc aussi ; $B_1 + B_4 = I_2$ est de rang 2, son image est donc également inversible. Les images de B_1 et de B_4 sont distinctes, donc Q25 permet de conclure.
32. Comme $\Phi'(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $C_1 = (1, 0, 0, 0)^\top$. De même $C_4 = (0, 0, \alpha, \beta)^\top$.
33. Φ' préserve le rang donc pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, $\mathrm{rg} B_i' = \mathrm{rg} B_i = 1$ et en particulier B_i' est non-inversible, or par définition de C_i on a $B_i' = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ et la nullité de son déterminant donne la relation désirée.
34. $B_1' + B_2'$ est de rang 1 (comme $B_1 + B_2$) donc son déterminant est nul à savoir

$$\begin{vmatrix} 1 + a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$0 = (1 + a_2) d_2 - b_2 c_2 = d_2$$

par la question précédente. De même pour $d_3 = 0$ avec $B_1' + B_3'$ non inversible.
35. En rassemblant toutes les informations connues sur M' on a à ce stade

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

de plus M' est inversible car Φ' est un automorphisme (composée d'automorphismes), donc $\det(M') = b_3 c_3 \beta = b_2 c_3 d_4 \neq 0$.
36. $B_3' + B_4'$ est de rang 1 donc non inversible donc son déterminant est nul, ceci donne, en utilisant que $b_3 c_3 = 0$, que

$$a_3 d_4 = b_3 c_4$$

De même le déterminant de $B_2' + B_4'$ est nul ce qui donne

$$a_2 d_4 - b_2 c_4 = 0$$

Enfin, $B_1' + B_2' + B_3' + B_4'$ a aussi un déterminant nul (rang 1) ce qui donne

$$0 = (1 + a_2 + a_3)d_4 - (b_2 + b_3)(c_3 + c_4) = d_4 - (b_2 + b_3)c_3$$

Il reste à prouver que $b_3 = 0$ car on aura alors $d_4 = b_2c_3$ (deuxième relation demandée) puis par la première relation on aura $a_3 = 0$ (car $d_4 \neq 0$) donc la forme de matrice annoncée, et enfin on aura $c_4 = a_2\frac{d_4}{b_2} = a_2c_3$ ($b_2 \neq 0$ et $b_2c_3 = d_4$).

On tire $b_3 = 0$ du fait que $B_3' = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix}$ a même rang que B_3, à savoir 1, donc non inversible, donc son déterminant, à avoir $-b_3c_3 = 0$, or on a montré $c_3 \neq 0$.

37. Par ce qui vient d'être fait on a

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_2c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2c_3 \end{pmatrix}$$

donc on reconnait une matrice de la forme par blocs

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix}$$

avec $a = 1, b = c = 0, d = c_3$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ ce qui par la question 29 donne que Φ' est dans $\mathcal{L}_1$ et donc $\Phi = \Phi_{P_1^{-1},Q_1^{-1}} \circ \Phi'$ aussi par stabilité par composition de $\mathcal{L}_1$ (cf la réponse à la question 13).

38. Comme $c_2 \neq 0$ et $b_2c_2 = 0$ on a $b_2 = 0$ donc

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche par T (Q26) on a le résultat voulu.

39. Cette matrice est inversible en tant que matrice d'automorphisme, donc son déterminant est non-nul donc

$$b_3c_2d_4 \neq 0$$

donc $b_3 \neq 0$, or $b_3c_3 = 0$ (fin de la Q34) donc $c_3 = 0$.

40. On va exploiter les trois déterminants nuls comme en 36. Cependant nous n'avons plus $c_2 = 0$, en revanche nous avons $c_3 = 0$. Ainsi

- $\det(B_1' + B_4') = 0 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ fournit (en utilisant que $b_3c_3 = 0$)

$$0 = a_3d_4 - b_3c_4$$

- $\det(B_2' + B_4') = 0 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 + c_4 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix}$ fournit (comme $d_4 \neq 0$)

$$a_2 = 0$$

- Le dernier donne, en utliisant $b_3c_3 = 0$ et en utlisant le premier, que

$$d_4 = b_3c_2$$

Finalement la matrice de $\Phi' \circ \mathcal{T}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

avec $d_4 = c_2 b_3$ et $c_4 = c_2 a_3$ car $c_2 = \frac{d_4}{b_3}$ donc on retrouve la forme par blocs de la question 29, ce qui prouve que $\Phi' \circ \mathcal{T}$ est dans $\mathcal{L}_1$ et donc par composition par $\mathcal{T}$, $\Phi' \in \mathcal{L}_2$ et par composition par $\Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}}$, $\Phi \in \mathcal{L}_2$ (cf preuve de 13).

L. Dietrich et S. Billouet