Devoir surveillé 3 - Version normale

Correction

Problème 1

PARTIE 1.

1.) On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1, \qquad \cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

D'où :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_0(x) = 1, \quad t_1(x) = x, \quad t_2(x) = 2x^2 - 1, \quad t_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

2.) On a :

- t_0 n'a aucune racine et aucun extremum.
- t_1 admet 0 comme racine , -1 comme minimum égal à -1 et 1 comme maximum égal à 1.
- t_2 admet $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ comme racines, en 0 on a un minimum égal à -1 et en -1 ou 1 on a un maximum égal à 1.
- t_3 admet 0, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ comme racines, en $\dfrac{1}{2}$ ou -1 on a un minimum égal à -1 et en -$\dfrac{1}{2}$ ou 1 on a un maximum égal à 1.

Remarque. Ne pas oubler les extremums aux bornes du domaine $[-1,1]$.

3.) Racines de t_n.

On a :

$$t_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n \arccos x) = 0 \Longleftrightarrow \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

La fonction arccos est une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$, donc :

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}.$$

Comme k est un entier alors k est élément de $[\![0, n-1]\!]$. Les racines de t_n sont les réels x_k avec k élément de $[\![0, n-1]\!]$.

Pour tout k compris entre 0 et $n-1$, on a

$$x_{n-k-1} = \cos\theta_{n-k-1} = \cos\frac{2(n-k-1)+1}{2n}\,\pi,$$

$$x_{n-k-1} = \cos\left(\pi - \frac{2k+1}{2n}\,\pi\right) = -\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\,\pi\right) = -x_k.$$

Les racines x_k sont opposées deux à deux.

4.1.) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,p\theta_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,p\,\frac{2k+1}{2n}\,\pi} = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p\pi}{n}}\right)^k.$$

Le complexe S_n est la somme d'une suite géométrique de raison $\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{n}}$, comme l'entier p est compris entre 1 et $n-1$ alors $\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{n}} \neq 1$, donc :

$$S_n = \mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{2n}}\,\frac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}p\pi} - 1}{\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{n}} - 1}\cdot$$

On sait que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,u} - 1 = \mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,u}{2}}\left(\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,u}{2}} - \mathbf{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,u}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)\,\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,u}{2}}.$$

On en déduit que :

$$S_n = \mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}\cdot$$

4.2.) Le nombre p est entier donc $\sin p\pi = 0$, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(p\theta_k) = \Re\left(Sn\right) = \frac{\sin p\pi}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} = 0.$$

5.) On sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2}\cdot$$

On a :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = \cos\Big((n+1)\arccos x\Big) + \cos\Big((n-1)\arccos x\Big),$$

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2\cos(n\arccos x)\,\cos(\arccos x).$$

La fonction arccos est une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$ donc :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \cos(\arccos x) = x.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2x\, t_n(x).$$

6.) Soit n un entier strictement positif, on montre par réccurence l'assertion suivante :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \forall k \in [\![1,n]\!], \quad t_k \text{ est une fonction polynomiale et } t_k(x) = 2^{k-1}x^k + \sum_{p=0}^{k-1} a_{p,k}x^p.$$

De la première question, on déduit que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$. On remarque que pour $n=0$, la fonction t_0 est constante, son coefficient dominant est 1.

On déduit de la question précédente que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x).$$

Si $\mathcal{P}(n)$ alors t_n et t_{n-1} sont éléments de $\mathcal{R}$ donc t_{n+1} est élément de $\mathcal{R}$.

Comme :

$$t_n(x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{p=0}^{n-1} a_{p,n}x^p, \quad t_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2} a_{p,n-1}x^p,$$

alors :

$$t_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \sum_{p=0}^{n} a_{p,n+1}x^p.$$

On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Big(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)\Big) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(1)$$

Donc pour tout entier naturel n, la fonction t_n est élément de $\mathcal{R}_n$ de coefficient dominant 1 si $n=0$ et 2^{n-1} si $n \geq 1$.

7.) Soit n un entier naturel non nul, on a montré à la question 4.1.) que les racines de t_n sont les $x_k = \cos\theta_k$ avec k entier compris entre 0 et $n-1$.

La fonction cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, les réels θ_k éléments de $[0,\pi]$ sont deux à deux distincts donc les racines x_k sont deux à deux distinctes.

Le polynôme T_n est de degré n donc il a au plus n racines complexes, comme il a n racines réelles distinctes il n'a pas de racines complexe non réelle.

PARTIE 2.

1.) Soit f un élément de $\mathcal{C}$, la fonction f est alors continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc bornée sur $[-1,1]$, soit :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \qquad \forall x \in [-1,1], \qquad |f(x)| \leq M.$$

La fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \left|\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On sait qu'une primitive de $x \in [0,1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$, de plus :

$$\lim_{a \longrightarrow 1} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \longrightarrow 1} \arcsin a = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$ est paire, intégrable sur $[0,1[$ donc intégrable sur $]-1,1[$, on en déduit que la fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

2.) Pour n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

On déduit de la question précédente, en particularisant $f(x) = x^n$, que ette intégrale est absolument convergente.

2.1.) On a :

$$I_0 = \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^1 = \pi, \qquad I_1 = \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_{-1}^1 = 0.$$

2.2.) Soit a et b éléments de $]-1,1[$, on intègre par parties $\displaystyle\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^{n+1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big]_a^b + (n+1)\int_a^b x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big]_a^b + (n+1)\int_a^b \frac{x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$(n+2)\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big]_a^b + (n+1)\int_a^b \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

On fait tendre a vers -1 et b vers 1, les intégrales étant convergentes alors :

$$(n+2)\, I_{n+2} = (n+1)\, I_n.$$

2.3.) On en déduit que :

$$I_2 = \frac{1}{2}\, I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4}\, I_2 = \frac{3\pi}{8}.$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{2p+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et impaire alors son intégrale est nulle, donc :

$$I_{2p+1} = 0.$$

3.1.) Les applications f et g sont éléments de $\mathcal{C}$ donc fg est élément de $\mathcal{C}$, on peut alors définir l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto < f|g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x \end{cases}$$

l'intégrale étant absolument convergente d'après la question 1.)
Montrons que cette application définie un produit scalaire :

- Symétrie : De la commutativité du produit dans $\mathcal{C}$, on déduit :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^2, \qquad < f|\, g >=< g|\, f > .$$

- Linéarité : De la linéarité des intégrales convergentes, on déduit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall (f_1, f_2, g) \in \mathcal{C}^3, \qquad < \lambda f_1 + f_2|\, g >= \lambda < f_1|\, g > + < f_2|\, g > .$$

On en déduit que l'application $< \ | \ >$ est une forme bilinéaire symétrique.

- Forme positive : On sait que l'intégrale entre -1 et 1 d'une fonction intégrable et positive sur $]-1,1[$ est positive donc :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \qquad < f|\, f >\geq 0.$$

- Forme définie : La fonction $x \longmapsto \dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable et positive sur $]-1,1[$, alors :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in]-1,1[, \quad \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = 0.$$

L'application f est continue sur $]-1,1[$, nulle sur $]-1,1[$ donc elle est nulle sur $[-1,1]$, on a montré que :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \qquad < f|\, f >= 0 \Longleftrightarrow f = 0_{\mathcal{C}}.$$

L'application $< \ | \ >$ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive, elle définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

3.2.) Montrons que la famille $\Big(t_p \ \Big| \ p \in [\![0,n]\!]\Big)$ est une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.

Calculons $< t_p|\, t_q >$, en effectuant le changment de variable $u = \arccos x$ qui est un C^1 difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$, on obtient :

$$< t_p|\, t_q >= \int_{-1}^{1} \frac{t_p(x)t_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} \cos(pu)\,\cos(qu)\,(-\mathrm{d}u),$$

$$< t_p|\, t_q >= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\Big((p+q)u\Big)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\Big((p-q)u\Big)\,\mathrm{d}u.$$

Les entiers p et q sont compris entre 0 et n, si $p \neq q$ alors :

$$< t_p|\, t_q >= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Big((p+q)u\Big)}{p+q}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Big((p-q)u\Big)}{p-q}\right]_0^{\pi} = 0.$$

De plus on a :

$$< t_0|\, t_0 >= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = I_0 = \pi,$$

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \qquad < t_p|\, t_p >= \int_0^{\pi} \cos^2(pu)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2pu)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

La famille $\Big(t_p \ \Big| \ p \in [\![0,n]\!]\Big)$ est une famille orthogonale de $n+1$ vecteurs non nuls donc c'est une famille libre, de plus la dimension de $\mathcal{R}_n$ est $n+1$, on a donc une famille orthogonale libre maximale c'est donc une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.
De plus on a :

$$||t_0|| = \sqrt{\pi}, \quad \forall p \in [\![1,n]\!], \quad ||t_p|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3.3.) Soit n un entier naturel non nul et k un élément de $[\![0,n-1]\!]$.
Le monôme X^k se décompose dans la base orthogonale $\Big(t_p \ \Big| \ p \in [\![0,k]\!]\Big)$, soit :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \qquad \exists (a_p)_{0\le p\le k} \in \mathbb{R}^{p+1}, \qquad X^k = \sum_{p=0}^{k} a_p t_p.$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^k\, t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =< X^k|\, t_n >= \sum_{p=0}^{k} a_p < t_p|\, t_n > .$$

La famille $\left(t_p \;\middle|\; p \in [\![0,n]\!]\right)$ est orthogonale donc :

$$\forall p \in [\![0,k]\!] \subset [\![0,n-1]\!], \qquad < t_p|\, t_n >= 0 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

4.) On veut montrer qu'il existe trois réels $a_0,\ a_1,\ a_2$ uniques, tels que pour tout polynôme P élément de $\mathcal{R}_5$, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{1}$$

4.1.) On suppose que l'égalité (1) est satisfaite pour tout P de $\mathcal{R}_5$, on détermine les réels $a_0,\ a_1,\ a_2$ en prennant successivement les polynômes $1,\ X,\ X^2$, on obtient :

$$\begin{cases} I_0 = a_0 + a_1 + a_2 \\ I_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_2 \\ I_2 = -\dfrac{3}{4}a_0 + \dfrac{3}{4}\,a_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = \pi \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_2 = 0 \\ -\dfrac{3}{4}a_0 + \dfrac{3}{4}\,a_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{\pi}{3} \\ a_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ a_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

4.2.) On vérifie que la solution trouvée convient pour $X^3,\ X^4,\ X^5$.
Pour X^3 et X^5, le polynôme P est impaire donc :

$$\frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\,P(0) + \frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Comme $I_3 = I_5 = 0$ alors l'égalité (1) est vérifiée.
Pour $P = X^4$ alors :

$$\frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\,P(0) + \frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{16}\right) = \frac{3\pi}{8} = I_4.$$

Si :

$$a_0 = a_1 = a_2 = \frac{\pi}{3}$$

alors l'égalité (1) est vérifiée pour tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{R}_5$.
Soit P un élément de $\mathcal{R}_5$, on a :

$$\exists!(\alpha_p)_{0\leq p\leq 5} \in \mathbb{R}^6, \qquad P = \sum_{p=0}^{5} \alpha_p X^p.$$

De plus on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{5} \alpha_p \int_{-1}^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Si $a_0 = a_1 = a_2 = \dfrac{\pi}{3}$ alors l'égalité (1) est satisfaite pour pour tout vecteur de la base canonique de $\mathcal{R}_5$ donc elle est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_5$.

5.1.) Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi \ : \ x \in]0,1[\longmapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

La fonction φ est définie et continue sur $]0,1[$, au voisinage de 0, on a $\varphi(x) \sim x^{\frac{7}{2}}$, donc $\lim\limits_{0} \varphi = 0$, on prolonge par continuité φ en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, l'application φ est alors continue sur $[0,1[$ et positive.
Au voisinage de 1 on a :

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

L'application $x \in [0,1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0,1[$ donc l'application φ est intégrable sur $[0,1[$.

5.2.) On effectue le changement de variable $u = 2x-1$ qui est un C^1 difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]-1,1[$, on obtient :

$$J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^4} \int_{-1}^{1} \frac{(1+u)^4}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

On particularise $P = (X+1)^4$, on obtient :

$$J = \frac{\pi}{3.2^4}\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 1 + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right) = \frac{35\pi}{128}.$$

Problème 2

Partie I.

1.1. D'après la formule du binôme,
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

1.2. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = 1$.

1.3. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ sont grossièrement divergentes.

2.1. La formule du binôme indique que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

2.2.1. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1,
$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$
Pour $|z|<1$ ce terme admet une limite. $\sum(a_n)$ converge et
$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

2.2.2. On a $\left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1$ et $\sum(a_n^*)$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme
$$\sum_{n\geq 0} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

2.3.1. La série $\sum(a_n)$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

2.3.2. Si $z=-2$ alors $a_n^* = (-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

2.3.3. (a_n^*) est une suite géométrique de raion $r = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = \cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\theta \in]0,\pi[$, $|r| \in]0,1[$ et $\sum(a_n^*)$ converge et
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} = 1 + i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Partie II.

1.1.1. On a
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

1.1.2. Par croissance comparées, on a donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$$

1.2. q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une suite finie de suites de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k \geq q,\ |a_k| \leq \varepsilon/2$. La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |S_q(n,a)| \leq \varepsilon/2$. On a alors

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| = \left| S_q(n,a) + \frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| \leq \varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

1.4. On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_k - l)$$

et on se ramène au cas précédent ($a_n - l \to 0$). Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$$

1.5. Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

Exercice 2

Voir le cours

Exercice 1