2025-2026

Devoir surveillé 3 - Version difficile

PSI

Correction - 4h

Exercice

I - Lemme de Cesàro

1 ▷

- Cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$, an a, par hypothèse sur la convergence de (u_n) :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|\sigma_n - l| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - l\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)\right|$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l|$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l|$$

le deuxième terme vérifie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{(n-n_0+1)\,\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, le premier terme étant une somme finie de réels, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| = 0$$

Ce qui donne, d'après la définition de la limite:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en posant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient :

$$\forall n \geq N, |\sigma_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi on a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ n \geq N \Rightarrow |\sigma_n - l| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet donc d'écrire:

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n = l$$

- Cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A>0$. La suite u tend vers $+\infty$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à $2A$. On a, pour tout $n>n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A\frac{n-n_0+1}{n}$$

et $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A\frac{n_0-n_0+1}{n} = 2A + \dfrac{B}{n}$ avec $B = \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2(1-n_0)A \in \mathbb{R}$.

Il existe un rag n_1 à partir duquel on a $\left|\dfrac{B}{n}\right| \leq A$ et donc $\dfrac{B}{n} \geq -A$. En posantSoit $N = \max(n_0, n_1\ )$ on obtient

$$\forall n \geq N, \sigma_n \geq 2A - A = A$$

Ainsi on a

$$\forall A > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ n \geq N \Rightarrow \sigma_n \geq A$$

Ce qui permet donc d'écrire:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$$

- Cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $-u$.

Applications

2 $\triangleright$ Soit $u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En utilisant Cesàro on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $k \geq 1$ on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

et pour $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ainsi

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

ce qui donne $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}}$.

3 $\triangleright$

- On a $e_n = u_{n+1} - u_n$ donc $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} e_k = \dfrac{u_{n+1} - u_0}{n+1}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha \in \mathbb{R}^*$,le lemme de Cesàro donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1},}{n+1} = \alpha$ ainsi $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n}$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha \in \mathbb{R}^*$ donc $e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha$, à partir d'un certain rang e_n et α sont de même signe et la série $\sum e_n$ diverge, le théorème de comparaison de séries à termes de signe constant donne $\sum\limits_{k=0}^{n} e_k \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\alpha$ soit $u_{n+1} - u_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\alpha$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n$.

4 $\triangleright$

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in]0, +\infty[$, composons par ln

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\ell)$$

La question précédente donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \ln(\ell)$$

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}=\ell}$.

- Si $\ell=+\infty$ (respectivement $\ell=0$) alors $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=+\infty$ (respectivement $-\infty$) , d'près la question 1 on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=+\infty \quad (\text{respectivement} -\infty)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\ln(\sqrt[n]{u_n})=+\infty \quad (\text{respectivement} -\infty)$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\ln(\sqrt[n]{u_n})=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\ln(\sqrt[n]{u_n})=+\infty$

- Soit $u_n=n!$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=n+1\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty}$.

- Soit $v_n=\frac{n^n}{n!}$,on a $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=(1+\frac{1}{n})^n\underset{n\to+\infty}{\to}e$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=e}$.

5 ▷ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ et $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$.

Posons $w_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, on a

$$\begin{aligned}
w_n-ab &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k}-ab)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k}-ab_{n-k}+ab_{n-k}-ab)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k-a)b_{n-k}+\frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(b_{n-k}-b)
\end{aligned}$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est bornée , soit $M=\sup_{k\geq 0}|b_k|$, donc

$$|w_n-ab|\leq\frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k-a|+\frac{|a|}{n+1}\sum_{k=1}^{n}|b_k-b|$$

le lemme de Cesàro on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k-a|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}|b_k-b|=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}w_n=ab$, d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)=ab}$$

6 ▷ Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}b_n$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B, $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, posons $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$ et $C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k$.

On a $C_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$, comme $(0\leq k\leq n\ \text{ et }\ 0\leq i\leq k)\Leftrightarrow(0\leq i\leq n\ \text{ et }\ i\leq k\leq n)$ (*), alors après interversion des sommes

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(a_i\sum_{k=i}^{n}b_{k-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}a_iB_{n-i}\\
&= \sum_{k=0}^{n}a_{n-k}B_k
\end{aligned}$$

ce qui donne pour tout $N \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} C_n &= \sum_{n=0}^{N} \left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left[\left(\sum_{n=k}^{N} a_{n-k}\right) B_k\right] \quad \text{(d'après (*))} \\
&= \sum_{k=0}^{N} A_{N-k} B_k
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} C_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} A_{N-k} B_k}$$

d'après la question 5. on a $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} A_{N-k} B_k = AB$, d'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_k\right) = AB}$

Problème

(1) $\left(\dfrac{1}{pk+q}\right)_{k \geq 0}$ est décroissante de limite nulle : la série $\boxed{\sum \dfrac{(-1)^k}{pk+q} \text{ est donc convergente}}$ d'après le critère spécial des séries alternées.

(2)

$$\begin{aligned}
\phi_{1,1}(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^k\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} \,\mathrm{d}t \\
&= \boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

(3)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2)$$

et d'autre part

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{S_{1,1} = \lim_{n \to +\infty} \phi_{1,1}(n) = \ln(2) + 0 = \ln(2)}.$$

(4)

$$\begin{aligned}
S_{1,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+q} \\
&\underset{j=k+q-1}{=} \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-q+1}}{j+1} \\
&= (-1)^{q+1} \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \\
&= (-1)^{q+1} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=0}^{q-2} \frac{(-1)^j}{j+1}\right) \\
&= (-1)^{q+1} \left(\ln(2) - \phi_{1,1}(q-2)\right) \\
&= \boxed{(-1)^q \left(\phi_{1,1}(q-2) - \ln(2)\right)}.
\end{aligned}$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

(5) $t \geq 0$,

$$x \mapsto h(x,t) = \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$$

est continue sur le segment $[0,1]$ donc

$$I_{p,q}(t) = \int_0^1 h(x,t)\,\mathrm{d}x$$

est bien définie. De plus, pour tout $x \in]0,1]$,

$$t \mapsto h(x,t) = \frac{e^{(t+1)\alpha_{p,q}\ln(x)}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$, de même (même si c'est inutile en travaillant sur $]0,1]$) que

$$t \mapsto h(0,t) = 0.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq h(x,t) \leq \varphi(x) = 1.$$

La dominatrice φ étant indépendante de t et intégrable sur $[0,1]$, le théorème de continuité des intégrales à paramètre affirme que

$$\boxed{t \mapsto I_{p,q}(t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}.$$

(6)

$$0 \leq I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{(n+1)\alpha_{p,q}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\alpha_{p,q}+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_{p,q}(n) = 0}.$$

(7)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1-(-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}}.$$

En intégrant l'identité précédente entre 0 et 1, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\alpha_{p,q}+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha_{p,q}}} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha_{p,q}}} + (-1)^n I_{p,q}(n).$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\alpha_{p,q}+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{kp/q+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k q}{kp+q} = q\phi_{p,q}(n).$$

En combinant ces deux résultats, il vient

$$\boxed{\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha_{p,q}}} + (-1)^n I_{p,q}(n)\right)}.$$

(8)

$$S_{p,q} = \lim_{n\to+\infty} \phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha_{p,q}}} = \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{p/q}}.$$

Effectuons le changement de variables $t = x^{1/q}$ ou encore $x = t^q$. Comme $\mathrm{d}x = qt^{q-1}\,\mathrm{d}t$, il vient

$$\boxed{S_{p,q} = \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{qt^{q-1}}{1+t^p}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}\,\mathrm{d}t}.$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

(9) $(p,q) \in E_1$, on a

$$\boxed{S_{p,q} = S_{p,p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+p} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p}S_{1,1} = \frac{\ln(2)}{p}}.$$

(10) $(p,q) \in E_2$, il existe un entier l tel que $q = lp$. On a alors

$$\begin{aligned}
S_{p,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+lp} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+l} \\
&\underset{j=k+l-1}{=} \frac{1}{p}\sum_{j=l-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-l+1}}{j+1} \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{p}\sum_{j=l-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{p}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=0}^{l-2} \frac{(-1)^j}{j+1}\right) \\
&= \frac{(-1)^{l-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).
\end{aligned}$$

On a donc le résultat demandé avec $\boxed{\lambda(p,q) = l = q/p}$.

(11) $X^p + 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont les racines p-ièmes de -1. Elles sont de la forme

$$\omega_{p,k} = e^{i\pi/p}e^{i2k\pi/p} = e^{i(2k+1)\pi/p} \text{ avec } k \in [\![0, p-1]\!].$$

Si p est pair. Alors -1 ne fait pas partie de ces racines, aucune de ces racines n'est réelle et elles viennent par paires $(\omega_{p,k}, \overline{\omega_{p,k}})$ avec $k \in [\![0, p/2-1]\!]$. La décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$ est alors de la forme

$$F(X) = \sum_{k=0}^{p/2-1} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{c_k}{X - \overline{\omega_{p,k}}}.$$

La fraction $F(X)$ étant à coefficients réels, l'unicité de la décomposition en éléments simples implique alors que $c_k = \overline{b_k}$.
Si p est impair. Alors -1 fait partie de ces racines (elle est obtenue pour $k = (p-1)/2$), les $p-1$ autres racines sont non réelles et elles viennent à nouveau par paires $(\omega_{p,k}, \overline{\omega_{p,k}})$ avec $k \in [\![0, (p-1)/2-1]\!]$. La décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$ est alors de la forme

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{(p-1)/2-1} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}}.$$

La formule demandée par l'énoncé couvre les deux cas en même temps et découle de ce qui précède en observant que

$$\frac{1-(-1)^p}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

et que

$$\llcorner p/2 \lrcorner = \begin{cases} p/2 \text{ si } p \text{ est pair} \\ (p-1)/2 \text{ si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

(12) *Dans le cas où p est impair*, alors

$$a_0 = [(X+1)F(X)](-1).$$

Or

$$X^p + 1 = (X+1)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}X^k$$

donc

$$\boxed{a_0 = [(X+1)F(X)](-1) = \frac{(-1)^{q-1}}{\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}(-1)^k} = \frac{(-1)^{q-1}}{p}}.$$

De même,

$$b_k = [(X-\omega_{p,k})F(X)](\omega_{p,k}) = \omega_{p,k}^{q-1}\left[\frac{X-\omega_{p,k}}{(X^p+1)-(X^p+1)[\omega_{p,k}]}\right][\omega_{p,k}].$$

On est ici dans le hors-programme ou au moins à l'extrême limite du programme !! On a

$$\lim_{x\to\omega_{p,k}}\frac{(x^p+1)-0}{x-\omega_{p,k}} = (X^p+1)'(\omega_{p,k}) = p\omega_{p,k}^{p-1}.$$

Et donc

$$b_k = [(X-\omega_{p,k})F(X)](\omega_{p,k}) = \frac{\omega_{p,k}^{q-1}}{p\omega_{p,k}^{p-1}}$$

Comme $\omega_{p,k}^p = -1$, on en déduit finalement que

$$\boxed{b_k = -\frac{1}{p}\omega_{p,k}^q = -\frac{1}{p}e^{iq(2k+1)\pi/p} = -\frac{1}{p}e^{iq\theta_k} \text{ avec } \theta_k = (2k+1)\pi/p}.$$

(13)

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner -1}\left(\frac{e^{iq\theta_k}}{X-\omega_{p,k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right).$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{iq\theta_k}}{X-\omega_{p,k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}} &= \frac{e^{iq\theta_k}}{X-e^{i\theta_k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X-e^{-i\theta_k}} \\
&= \frac{(e^{iq\theta_k}+e^{-iq\theta_k})X - (e^{i(q-1)\theta_k}+e^{-i(q-1)\theta_k})}{X^2-2\cos(\theta_k)X+1} \\
&= 2\frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2-2\cos(\theta_k)X+1}.
\end{aligned}$$

Et finalement

$$\boxed{F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\frac{1}{X+1} - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner -1}\frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2-2\cos(\theta_k)X+1}}.$$

(14)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner -1}\cos(q\theta_k) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner -1} e^{iq(2k+1)\pi/p}\right) &&= \mathrm{Re}\left(e^{iq\pi/p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner -1}\left(e^{2iq\pi/p}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{iq\pi/p}\frac{1-\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner}}{1-e^{2iq\pi/p}}\right) &&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner}}{e^{-iq\pi/p}-e^{iq\pi/p}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner}}{-2i\sin(q\pi/p)}\right) &&= \frac{1}{2\sin(q\pi/p)}\mathrm{Re}\left(i\left(1-\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{2\sin(q\pi/p)}\mathrm{Re}\left(i\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner}\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{Si\ p\ est\ pair}$, alors

$$\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner} = e^{iq\pi} = (-1)^q \in \mathbb{R} \text{ et donc } \boxed{\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1} \cos(q\theta_k) = 0.}$$

$\boxed{Si\ p\ est\ impair}$, alors

$$\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner} = e^{iq(p-1)\pi/p} = (-1)^q e^{-iq\pi/p} \text{ et } \mathrm{Re}\left(i\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\llcorner p/2 \lrcorner}\right) = (-1)^q \mathrm{Re}\left(ie^{-iq\pi/p}\right) = (-1)^q \sin(q\pi/p).$$

Et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1} \cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q+1}}{2}.}$$

(15)

$$\begin{aligned}
S_{p,q} &= \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\int_0^1 F_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\int_0^1 F_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\left(\cos(q\theta_k)\ln(2\sin(\theta_k/2)) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k)\right) \\
&= \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\ln(2)\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\cos(q\theta_k) \\
&\quad + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\left(\frac{\pi}{p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2\cos(q\theta_k)\ln(\sin(\theta_k/2))\right) \\
&= \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\ln(2)\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\cos(q\theta_k) \\
&\quad + \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}(p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\cos(q\theta_k)\ln(\sin(\theta_k/2))\right).
\end{aligned}$$

Or, *si p est pair*, on a d'après (14)

$$\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\ln(2)\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\cos(q\theta_k) = 0 - 0 = 0$$

et *si p est impair*

$$\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\ln(2)\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q-1}}{p}\ln(2) - \frac{(-1)^{q+1}}{2}\ln(2) = 0.$$

Dans tous les cas, on a bien

$$\boxed{S_{p,q} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{p}\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}(p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2\sum_{k=0}^{\llcorner p/2 \lrcorner - 1}\cos(q\theta_k)\ln(\sin(\theta_k/2))\right)}.$$

(16)

$$\boxed{S_{2,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin(\pi/2) - 2\cos(\pi/2)\ln(\sin(\pi/4))\right) = \frac{\pi}{4}},$$

et

$$\boxed{S_{3,1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{3}2\sin(\pi/3) - 2\cos(\pi/3)\ln(\sin(\pi/6))\Big) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(1/2)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln(2)\right)}.$$

Résultats confirmés par un calcul direct

$$S_{2,1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \text{ et } S_{3,1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \cdots.$$

3 Quelques calculs de probabilité

(17)

$$A_n = (\llbracket 1,n\rrbracket \cap E_1),\ B_n = (\llbracket 1,n\rrbracket \cap E_2) \text{ et } C_n = (\llbracket 1,n\rrbracket \cap E_3)$$

puis

$$E_n = \llbracket 1,n\rrbracket \cap E = (\llbracket 1,n\rrbracket \cap E_1) \sqcup (\llbracket 1,n\rrbracket \cap E_2) \sqcup (\llbracket 1,n\rrbracket \cap E_3) = A_n \sqcup B_n \sqcup C_n.$$

(18)

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} (p = k, q = k).$$

Par incompatibilité et indépendance des choix de p et q, il vient

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(p = k)\mathbb{P}(q = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}}.$$

Les entiers p et q jouant un rôle symétrique, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(p \neq q) = \frac{1}{2}\big(1 - \mathbb{P}(p = q)\big) = \frac{n-1}{2n}}.$$

(19)

$$B_n = \bigcup_{(k,l)} (p = k, q = lk),$$

la réunion portant sur tous les couples (k,l) d'entiers entre 1 et n tels que $1 < l \leq n/k$, c'est-à-dire $l \in \llbracket 2, \lfloor n/k \rfloor\rrbracket$. On a donc à nouveau par incompatibilité et indépendance

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\lfloor n/k\rfloor} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\big(\lfloor n/k\rfloor - 1\big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor n/k\rfloor - \frac{1}{n}}.$$

On en déduit par incompatibilité que

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n \cup B_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor n/k\rfloor}.$$

(20)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \ln(n) \geq H_n \geq \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n)$$

et donc

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}.$$

(21) k,

$$n/k - 1 \leq \lfloor n/k\rfloor \leq n/k.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$nH_n - n \leq \sum_{k=1}^{n}\lfloor n/k\rfloor \leq nH_n,$$

puis

$$\frac{H_n - 1}{n} \leq \mathbb{P}(A_n \cup B_n) \leq \frac{H_n}{n}$$

et enfin à l'aide de (20) et du théorème des gendarmes pour les équivalents,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}.$$

(22)

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2}}.$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

(23)

$$\begin{aligned} I_{p,q}(n) &\underset{s=x^{n+1}}{=} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} \frac{1}{n+1} s^{1/(n+1)-1} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1+1/(n+1)}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Pour $s \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n(s) = \frac{s^{\alpha_{p,q}-1+1/(n+1)}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}}.$$

Chaque f_n est continue et pour tout $s \in]0, 1]$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(s) = \frac{s^{\alpha_{p,q}-1}}{2}.$$

De plus,

$$\forall s \in]0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq f_n(s) \leq s^{\alpha_{p,q}-1} = \varphi(s).$$

Comme $\alpha_{p,q} - 1 > -1$, φ est intégrable en 0 donc intégrable et indépendante de n. Par convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1+1/(n+1)}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1}}{2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\alpha_{p,q}}.$$

Et donc

$$I_{p,q}(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\alpha_{p,q}}.$$

De là,

$$\boxed{R_{p,q}(n) = \frac{1}{q} I_{p,q}(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2nq\alpha_{p,q}} = \frac{1}{2np}}.$$

(24)

$$\phi_{p,q}(n) - S_{p,q} = \frac{(-1)^n}{q} I_{p,q}(n).$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\phi_{p,q}(n+1) - S_{p,q}}{\phi_{p,q}(n) - S_{p,q}} \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2np}{2(n+1)p} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1,$$

ce qui signifie que la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée est $\boxed{\text{infra-linéaire}}$ pour tout couple (p, q).