2025-2026

Devoir surveillé 2 - Version normale

PSI

Intégrales généralisées - Algèbre linéaire - 4h

Exercice 1

$\boxed{I_1}$ L'intégrale I_1 est impropre en $+\infty$. De plus,

$$\forall x \geq 3, \quad \frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$$

Les fonctions étant positives et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ étant divergente, on peut conclure grâce au théorème de comparaison que I_1 est divergente.

$\boxed{I_2}$ L'intégrale I_2 est impropre ne $+\infty$. Par éclatement, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

La première intégrale diverge par Riemann. Nous allons montrer que la seconde est convergente grâce à une IPP, en posant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & \frac{1}{x} \\ v(x) & = & \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right. \qquad \text{donc} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & -\frac{1}{x^2} \\ v'(x) & = & \cos 2x \end{array} \right.$$

Les fonctions sont C^1 et le crochet

$$\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin 2}{2}$$

converge car c'est le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée. Cela justifie l'IPP. La deuxième intégrale est donc de même nature que :

$$\int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^2}\frac{\sin 2x}{2} dx.$$

De plus

$$\left|-\frac{1}{x^2}\frac{\sin x}{2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge par Riemann et les fonctions sont positives. D'après le théorème de comparaison :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\frac{\sin x}{2} dx$$

est convergente et donc I_2 converge.

$\boxed{I_3}$ L'intégrale I_3 est impropre en $x = 1$. Posons $X = 1 - x$ donc $dx = -dX$:

$$I_3 = -\int_1^0 \frac{1}{X^{1/2}} dX = \int_0^1 \frac{1}{X^{1/2}} dX.$$

Donc I_3 converge par Riemann.

$\boxed{I_4}$ L'intégrale I_4 est impropre en 0 et en 1. De plus :

$$\begin{cases} \dfrac{t\ln(t)}{t-1} \underset{0}{\sim} -t\ln(t) \underset{t\to 0}{\overset{\text{CC}}{\longrightarrow}} 0 \\ \dfrac{t\ln(t)}{t-1} \underset{1}{\sim} \dfrac{t(t-1)}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$$

L'intégrale I_4 est donc faussement impropre en 0 et en 1. Elle est donc convergente.

Exercice 2

$\boxed{1}$ Tout d'abord :

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Puis effectuons une IPP sur W_n en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \sin^{n-1}(x) & u'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2}(x), \\ v(x) = -\cos x, & v'(x) = \sin x. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$W_n = \Big[-\cos x \sin^{n-1}(x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2}(x)dx.$$

Ainsi :

$$W_n = 0 + \int_0^{\pi/2} (n-1)(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}(x)dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

Enfin :

$$W_n(1+(n-1)) = (n-1)W_{n-2} \quad \text{d'où} \quad W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}.$$

$\boxed{2}$ Comme $\cos x \in [0,1]$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la suite $(\cos^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et :

$$W_{n+2} \geq W_{n+1} \geq W_n$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{n+1}{n+2} \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq 1$$

Comme $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on en déduit par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$$

et donc $W_n \sim W_{n+1}$.

$\boxed{3}$ Posons $X = \dfrac{\pi}{2} - x$, donc $dX = -dx$. On obtient :

$$W_n = -\int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - X\right)dX = \int_0^{\pi/2} \cos^n(X)dX.$$

$\boxed{4}$ Montrons le résultat par récurrence.

• Initialisation : $n = 0$.

$$W_{2\times 0} = W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(0)!}{2^0(0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

De plus :

$$W_{2n+1} = W_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^0(0!)^2}{1!} = 1.$$

Donc la propriété est initialisée

• Hérédité : soit n dans $\mathbb{N}$. Grâce à la relation de la question 1, et par hypothèse de récurrence :

$$W_{2n+2} \ = \ \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \underset{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$W_{2n+2} \ = \ \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^2(n+)^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \ = \ \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

De même :

$$W_{2n+3} \ = \ \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1} \underset{\text{HR}}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Donc :

$$W_{2n+3} \ = \ \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \ = \ \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

La propriété est initialisé et héréditaire. Le résultat est donc montré par récurrence.

$\boxed{5}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = nW_nW_{n-1}$. On a alors :

$$v_{n+1} \ = \ (n+1)W_{n+1}W_n \ = \ (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n \ = \ v_n$$

La suite (v_n) est donc constante. On a alors en utilisant l'équivalent de la question 2 :

$$\frac{\pi}{2} \ = \ W_1W_0 \ = \ v_0 \ = \ v_n \ = \ (n+1)W_{n+1}W_n \ \underset{+\infty}{\sim} \ nW_n^2$$

Ainsi

$$W_n^2 \ \underset{+\infty}{\sim} \ \frac{\pi}{2n}.$$

Et comme $W_n \geq 0$, on a

$$W_n \ \underset{+\infty}{\sim} \ \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

$\boxed{6}$ La fonction $\ln(1+x)$ est concave. Elle est donc en dessous de ses tangentes ; en particulier, sa tangente en 0. On obtient :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \ \leq \ x$$

On a donc, pour tout t dans $[0; \sqrt{n}[$:

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) && \leq \ -\tfrac{t^2}{n} \\ \iff \ & e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} && \leq \ e^{-t^2} \\ \iff \ & \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n && \leq \ e^{-t^2} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) & \leq & \frac{t^2}{n} \\
\Longleftrightarrow & e^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} & \leq & e^{t^2} \\
\Longleftrightarrow & \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n & \leq & e^{t^2} \\
\Longleftrightarrow & \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} & \geq & e^{-t^2}
\end{array}$$

$\boxed{7}$ En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(x)$, (donc $dt = \sqrt{n}\cos(x)\,dx$) on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{n}W_{2n+1} & = & \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))^n \cos(x)\,dx \\
 & = & \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \\
 & \leq & \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \quad \text{(d'après Q2)}
\end{array}$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(x)$ (donc $dt = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$), on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{n}W_{2n-2} & = & \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\frac{dx}{\cos^2(x)} \\
 & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \\
 & \geq & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \\
 & \geq & \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \quad \text{(d'après Q2)}
\end{array}$$

$\boxed{8}$ Avec l'équivalent de W_n donné dans l'énoncé, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\sqrt{n}\,w_{2n+1} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{n\cdot\frac{\pi}{2(2n+1)}} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{\frac{n\pi}{4n}} & = & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\sqrt{n}\,w_{2n-2} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{n\cdot\frac{\pi}{2(2n-2)}} & \underset{+\infty}{\sim} & \sqrt{\frac{n\pi}{4n}} & = & \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,w_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,w_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En utilisant l'inégalité de la question 3 et le théorème d'encadrement, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, on conclut :

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Exercice 3

$\boxed{1}$ Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $P\left(\frac{k}{n}\right)$ est une constante, on obtient :

$$\deg(f_n(P)) \;=\; \deg\left(\sum_{k=0}^{n} P\left(\tfrac{k}{n}\right) B_k\right) \;\leq\; \max(\deg B_0, \dots, \deg B_n) \;\leq\; n.$$

Donc $f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus

$$\deg(\varphi_n(P)) \;=\; \deg\left(nXP + X(1-X)P'\right) \;\leq\; \max(\deg(nXP), \deg(X(1-X)P')) \;\leq\; \deg P + 1.$$

Il faut vérifier que le coefficient dominant s'élimine. Écrivons

$$P \;=\; a_n X^n + P_0$$

avec $\deg P_0 \leq n-1$. On a alors par linéarité

$$\varphi_n(P) = a_n \varphi_n(X^n) + \varphi_n(P_0),$$

et

$$\varphi_n(X^n) \;=\; nX^{n+1} + X(1-X)nX^{n-1} \;=\; nX^{n+1} + nX^n - nX^{n+1} \;=\; nX^n.$$

On a donc bien

$$\deg(\varphi_n(P)) \;\leq\; \max\Big(\deg(\varphi_n(X^n))\,,\, \deg(P_0)\Big) \;\leq\; n.$$

$\boxed{2}$ Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$f_n(\lambda P + \mu Q) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)\left(\tfrac{k}{n}\right) B_k \;=\; \lambda \sum_{k=0}^{n} P\left(\tfrac{k}{n}\right) B_k \;+\; \mu \sum_{k=0}^{n} Q\left(\tfrac{k}{n}\right) B_k \;=\; \lambda f_n(P) + \mu f_n(Q).$$

De plus

$$\varphi_n(\lambda P + \mu Q) \;=\; nX(\lambda P + \mu Q) + X(1-X)(\lambda P' + \mu Q') \;=\; \lambda \varphi_n(P) + \mu \varphi_n(Q).$$

Ainsi, les applications φ_n et f_n sont linéaires.

$\boxed{3}$ Soit k dans $\{0, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_n(B_k) &= n\,X\,B_k + X(1-X)B_k' \\
&= n\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)\tbinom{n}{k}\left[kx^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-1-k}\right] \\
&= X^k(1-X)^{n-k}\tbinom{n}{k}\left[nX + k(1-X) - (n-k)X\right] \\
&= X^k(1-X)^{n-k}\tbinom{n}{k}\left[nX + k - kX - nX + kX\right] \\
&= kB_k.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 B_0 + \cdots + \lambda_n B_n = 0.$$

En appliquant φ_n une fois, deux fois, ..., $n-1$ fois, on obtient un système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 B_0 \\ \lambda_1 B_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} B_{n-1} \\ \lambda_n B_n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde de déterminant non nul, donc

$$\lambda_0 B_0 \;=\; \lambda_1 B_1 \;=\; \cdots \;=\; \lambda_n B_n \;=\; 0,$$

et donc

$$\lambda_0 \;=\; \cdots \;=\; \lambda_n \;=\; 0$$

$\boxed{5}$ Une matrice de φ_n dans $\mathcal{F}$ est

$$[\varphi_n]_{\mathcal{F}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\varphi_n(P) = X\big[nP + (1-X)P'\big].$$

Donc $\varphi_n(P)$ est un multiple de X. Ainsi, le polynôme 1 ne peut avoir une antécédente. Donc φ_n n'est pas bijective.

$\boxed{7}$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_n(P) = 0$.
Alors

$$\sum_{k=0}^{n} P\big(\tfrac{k}{n}\big)\, B_k = 0.$$

Or $\mathcal{F}$ est libre, donc

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P\big(\tfrac{k}{n}\big) = 0.$$

Le polynôme P a donc $n+1$ racines alors que c'est un polynôme de degré n maximum. Donc $P = 0$.
Ainsi l'application φ_n est injective, et donc bijective car φ_n est un endomorphisme en dimension finie.

Exercice 4

$\boxed{1}$ L'intégrale est impropre en 0 et en 1.

— En 0 si $n \geq 1$:

$$\frac{t^{2n}\ln(t)}{t^2-1} \underset{0}{\sim} -t^{2n}\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par CC. Ainsi I_n est faussement impropre en 0, donc cvg en 0.

— En 0 si $n = 0$:

$$\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{0}{\sim} -\ln(t)$$

Les fonctions sont positives et l'intégrale :

$$\int_0^1 -\ln(t)dt \quad = \quad \Big[-t\ln(t) + t\Big]_0^1 \quad = \quad 0$$

converge par CC. D'après le théorème de comparaison, l'intégrale I_n converge en 0.

— En 1 :

$$\frac{t^{2n}\ln(H)}{t^2-1} \underset{1}{\sim} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$$

Ainsi I_n est faussement impropre en 1, donc cvg en 1.

Ainsi, l'intégrale I_n est convergente pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\boxed{2}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n - I_{n+1} \quad = \quad -\int_0^1 \frac{t^{2n+2} - t^{2n}}{t^2-1}\ln(t)dt \quad = \quad -\int_0^1 t^{2n}\ln(t)dt$$

On pose $u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, $v'(t) = t^{2n}$. Les fonctions sont C^1 et le crochet

$$\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 \quad = \quad \Big[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln(t)\Big]_0^1 \quad = \quad 0$$

converge par CC. On peut donc réaliser une intégration par parties généralisée :

$$\int_0^1 \ln(t)\, t^{2n}\, dt \quad = \quad 0 \; - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt \quad = \quad \left[\frac{t^{2n}}{(2n+1)^2} \ln(t) \right]_0^1 \quad = \quad \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$\boxed{3}$ En utilisant le résultat de la question 2, on obtient par somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{\text{Q2}}{=} \sum_{k=0}^{n} I_k - I_{k+1} \underset{\text{ST}}{=} I_0 \; - \; I_{n+1}$$

$\boxed{4}$ Tout d'abord :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \quad = \quad \sum_{k=1 k \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1 k \text{ pair}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{6}.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \quad = \quad \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{24}.$$

On obtient enfin :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}$$

$\boxed{5}$ Par CC, $t^2 \ln(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\underset{t \to 0}{lim} \; \frac{t^2 \ln(t)}{t^2 - 1} = 1$$

De plus,

$$\frac{t^2 \ln(t)}{t^2 - 1} \underset{1}{\sim} \frac{t^2(t-1)}{(t-1)(t+1)} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\underset{t \to 1}{lim} \; \frac{t^2 \ln(t)}{t^2 - 1} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

La fonction f peut donc être prolongée par continuité sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe donc M dans $\mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$$

$\boxed{6}$ Majorons I_{n+1} :

$$|I_{n+1}| \quad = \quad \left| \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{t^2 - 1} dt \right| \underset{\text{IT}}{\leq} \int_0^1 t^{2n} |f(t)| dt \underset{\text{Q5}}{\leq} M \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \quad = \quad \frac{M}{2n+1}$$

Par théorème d'encadrement, I_{n+1} tend vers 0. Reprenons l'équation obtenue dans la Q3 :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad = \quad I_0 \; - \; I_{n+1}$$

et passons à la limite quand n tend vers $+\infty$. On obtient :

$$I_0 \quad = \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \underset{\text{Q4}}{=} \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 5

Voir le cours.