Devoir surveillé 2 - Version difficile

Correction - 4h

Exercice 1

$\boxed{1}$ L'intégrale est impropre en 0 et en 1.

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{0}{\sim} -\ln(t)$$

De plus

$$-\int_0^1 \ln(t)dt \quad = \quad \big[-t\ln(t)+t\big]_0^1 \underset{\text{CC}}{=} 0$$

par croissance comparée. Les fonctions sont positives, d'après le théorème de comparaison, l'intégrale I est convergente en 0. De plus :

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$$

L'intégrale I est faussement impropre en 1, donc convergente en 1.

$\boxed{2}$ Posons $x = -\ln(t)$, donc $t = e^{-x}$ et $dt = -e^{-x}dx$. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et strictement croissant. Ainsi :

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1}\,dx \quad = \quad -\int_0^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}\,dx \quad = \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$$

$\boxed{3}$ L'intégrale est impropre en $+\infty$. De plus,

$$x^2\big(xe^{-nx}\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. On a donc

$$xe^{-nx} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Les fonctions sont positives et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge. D'après le théorème de comparaison, J_n converge donc également. Posons

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{n}e^{-nx}, & v'(x) = e^{-nx} \end{cases}$$

Les fonctions sont $\mathcal{C}^1$ et le crochet

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_0^{+\infty} \quad = \quad \Big[-\frac{x}{n}e^{-nx}\Big]_0^{+\infty} \quad = \quad 0.$$

converge par CC. On peut donc réaliser une intégration par parties généralisée, on obtient :

$$J_n \quad = \quad \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx \quad = \quad \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{+\infty} \quad = \quad \frac{1}{n^2}.$$

$\boxed{4}$ La fonction g est dérivable sur $]0,1]$ et
$$g'(x) = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x-1)^2}.$$
Posons $h(x) = e^x - 1 - xe^x$. Alors
$$h'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \leq 0.$$
Comme $h(0) = 0$ et h est décroissante, on a $h \leq 0$. Donc $g'(x) \leq 0$ et g est décroisssante. Enfin,
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \qquad\qquad g(1) = \frac{1}{e-1} > 0$$
Donc
$$\forall x \in]0,1],\ \ 0 \leq g(x) \leq 1$$

$\boxed{5}$ On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} J_k &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx}\,dx = \int_0^1 x\sum_{k=1}^{n}(e^{-x})^k\,dx = \int_0^1 x\,\frac{e^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{e^x-1}\,dx - \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\,dx = I - \int_0^1 g(x)e^{-nx}\,dx,\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ D'après la question 5 :
$$\forall x \in]0,1],\ \ 0 \ \leq\ g(x)\ \leq 1$$
On en déduit que :
$$0 \ \leq\ \int_0^{+\infty} g(x)e^{-nx}\,dx \ \leq\ \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx \ =\ \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{+\infty} \ =\ \frac{1}{n}.$$
Par le théorème d'encadrement, on obtient :
$$\int_0^{+\infty} g(x)e^{-nx}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Reprenons l'équation obtenue dans la question 5 :
$$\sum_{k=1}^{n} J_k \ =\ I - \int_0^1 g(x)e^{-nx}dx$$
et passons à la limite quand n tend vers $+\infty$:
$$I \ =\ \sum_{k=1}^{\infty} J_k \underset{\text{Q3}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \ =\ \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2

$\boxed{1}$ L'intégrale I est impropre en 0 et en $+\infty$. En 0, on a :
$$\cos(at) - \cos(bt) \ =\ 1 - \tfrac{(at)^2}{2} - 1 + \tfrac{(bt)^2}{2} + o(t^2) \ =\ \tfrac{(b^2-a^2)t^2}{2} + o(t^2)$$
Donc
$$\frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{(b^2-a^2)t}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
L'intégrale I est faussement impropre en 0, donc convergente.

En $+\infty$, effectuons une IPP en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = \dfrac{\sin(at)}{a} - \dfrac{\sin(bt)}{b} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} u'(x) = -\dfrac{1}{t^2}, \\ v'(t) = \cos(at) - \cos(bt). \end{cases}$$

Les fonctions sont C^1 et le crochet :

$$\left[\frac{b\sin(at) - a\sin(bt)}{abt}\right]_1^{+\infty}$$

converge. Les hypothèses du théorème sont vérifiées. Ainsi, L'intégrale I, en $+\infty$, est de même nature que

$$\frac{1}{ab}\int_1^{+\infty} \frac{b\sin(at) - a\sin(bt)}{t^2}\,dt.$$

Or

$$\left|\frac{b\sin(at) - a\sin(bt)}{t^2}\right| \quad \leq \quad \frac{a+b}{t^2}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a+b}{t^2} dt$ converge par Riemann.
Donc I est convergente également en $+\infty$ grâce au théorème de comparaison des fonctions positives.

$\boxed{2}$ Quitte à inverser les rôles de a et b, on peut supposer que $a \leq b$. Comme la fonction $t \mapsto \cos t$ est décroissante sur $[0, \pi]$, on a pour tout ε de $\left[0; \frac{\pi}{b}\right]$ et pour tout t de $[a\varepsilon, b\varepsilon]$:

$$\cos(a\varepsilon) \quad \geq \quad \cos(t) \quad \geq \quad \cos(b\varepsilon)$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\cos(a\varepsilon)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt \quad \geq \quad \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \geq \quad \cos(b\varepsilon)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt$$

Soit encore :

$$\cos(a\varepsilon)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \geq \quad \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \geq \quad \cos(b\varepsilon)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ quand ε tend vers 0. Ainsi, par le théorème d'encadrement :

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos T}{T}\,dT \quad \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \quad \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\boxed{3}$ Soit ε dans $\mathbb{R}_+^*$. On pourrait montrer comme dans la question 1, grâce à une IPP, que l'intégrale :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t}\,dt$$

est convergente. On a donc :

$$I_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}\,dt \quad = \quad \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t}\,dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(bt)}{t}\,dt$$

Effectuons le changement de variable $T = at$ dans la première intégrale et $T = bt$ dans la seconde. On obtient :

$$I_\varepsilon \quad = \quad \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos T}{T/a}\,\frac{dT}{a} - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos T}{T/b}\,\frac{dT}{b}$$

Donc :

$$I_\varepsilon \quad = \quad \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos T}{T}\,dT$$

En utilisant la question Q1, on obtient :

$$I \quad = \quad \underset{\varepsilon \to 0}{lim}\, I_\varepsilon \quad = \quad \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\boxed{4}$ C'est une intégrale de Dirichlet. Cf cours.

$\boxed{5}$ Tout d'abord, on peut décomposer J sous la forme :

$$J \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt \;-\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bt)}{t}\,dt$$

Effectuons ensuite le changement de variable $T = at$ dans la première intégrale et $T = bt$ dans la seconde :

$$J \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin T}{T}\,dT \;-\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin T}{T}\,dT \;=\; 0$$

$\boxed{6}$ Tout d'abord, en supposant $a \geq b$:

$$K_1 \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos((a-b)t) \;-\; \cos((a+b)t)}{t}\,dt \underset{\text{Q3}}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$

De plus :

$$K_2 \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin((a+b)t) \;-\; \sin((a-b)t)}{t}\,dt \underset{\text{Q5}}{=} 0$$

Si $a \leq b$, on inverse les rôles de a et b.

Exercice 3

$\boxed{1}$ Les fonctions f et $t \mapsto \cos(nt)$ sont C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| \\
&= \left|\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)dt\right| \\
&\underset{\text{IT}}{\leq} \frac{|f(a)\sin(na)|}{n} + \frac{|f(b)\sin(nb)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)\sin(nt)|dt
\end{aligned}$$

La fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée par un certain réel M. On obtient :

$$|I_n| \;\leq\; \frac{|f(a)|}{n} + \frac{|f(b)|}{n} + \frac{M}{n}(b-a)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$\boxed{2}$ Soit $(x_0,\ldots,x_p)$ une subdivision adaptée à la fonction en escaliers f c'est-à-dire que $a = x_0$, $b = x_p$ et que les points de discontinuité de f sont dans l'ensemble $\{x_0,\ldots,x_p\}$. De plus notons λ_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| &= \left|\sum_{i=0}^{p-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\cos(nt)dt\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos(nt)dt\right| \\
&\underset{\text{IT}}{\leq} \sum_{i=0}^{p-1}|\lambda_i|\left|\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{p-1}\frac{2|\lambda_i|}{n}
\end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{3}$ Soit $(x_0, \ldots, x_p)$ une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux f. Sur chaque $]x_i; x_{i+1}[$, la fonction f est prolongeable par continuité sur $[x_i; x_{i+1}]$ puisque les limites de f aux bornes existent. Cette fonction est alors continue sur un segment, elle est donc bornée par un certain M_i. On a donc :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \forall t \in]x_i; x_{i+1}[,\ |f(t)| \leq M_i$$

Le réel :

$$M = Max\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, |f(x_0)|, |f(x_0)|, \ldots, |f(x_n)|\}$$

est alors un majorant de $|f|$, et f est bornée.

$\boxed{4}$ Soit $\varepsilon' > 0$. Comme f est continue par morceaux, il existe une suite (g_n) de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f. Ainsi il existe N dans $\mathbb{N}$, tel que :

$$\|f - g_N\|_\infty \leq \varepsilon'$$

Il suffit de prendre $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et $g = g_N$.

$\boxed{5}$

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| \\
&= \left|\int_a^b (f(t) - g(t))\cos(nt)dt + \int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right| \\
&\underset{\text{IT}}{\leq} \int_a^b |f(t) - g(t)||\cos(nt)|dt + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right| \\
&\leq \|f - g\|_\infty \int_a^b 1dt + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right|
\end{aligned}$$

Enfin dans la question 2, on a vu que le lemme de Lebesgues est vrai pour les fonctions en escaliers, donc pour la fonction g. Le second terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il est donc inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$ à partir d'un certain rang. On obtient la définition de la limite nulle de I_n en $+\infty$.

Exercice 4

$\boxed{1}$ Cf TD

$\boxed{2}$ $\displaystyle \frac{F'}{F} = \left(\frac{A}{B}\right)' \times \frac{B}{A} = \frac{A'B - AB'}{B^2} \times \frac{B}{A} = \frac{A'B - AB'}{AB} = \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}$

Puis on utilise la question 1.

$\boxed{3}$ Soit D un polynôme divisant à la fois P et Q. Comme $P + Q = R$, il divise aussi R. Or les seuls polynômes divisant P, Q et R sont les polynômes constants. Ainsi D est constant et, P et Q sont premiers entre eux. On raisonne de même sur P et R et sur Q et R.

$\boxed{4}$ On a $\displaystyle F + G = \frac{P}{R} + \frac{Q}{R} = 1$ donc $F' + G' = 0$

$\boxed{5}$ $\displaystyle -\frac{\frac{F'}{F}}{\frac{G'}{G}} = -\frac{F'G}{FG'} = \frac{F'G}{FF'} = \frac{G}{F} = \frac{Q}{P}$

$\boxed{6}$ $deg(N_0) = l + m + n = n_0(P) + n_0(Q) + n_0(R) = n_0(PQR)$ car les λ_i μ_i et ν_i sont différents.

$\boxed{7}$ En utilisant le 2 ds préliminaires on a :

$$N_0\frac{F'}{F} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{N_0}{X-\lambda_i} - \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{N_0}{X-\nu_i}$$

Enfin $\frac{N_0}{X-\lambda_i}$ et $\frac{N_0}{X-\nu_i}$ étant des polynômes pour tout i de $\{0,\ldots,n\}$, la fraction $N_0\frac{F'}{F}$ est aussi un polynôme. De plus $deg\left(\frac{N_0}{X-\lambda_i}\right) = deg\left(\frac{N_0}{X-\lambda_i}\right) = l+m+n-1 = n_0(PQR)-1$, donc $deg\left(N_0\frac{F'}{F}\right) \leq n_0(PQR)-1$. On raisonne de même pour la fraction $N_0\frac{G'}{G}$.

$\boxed{8}$ D'après 3 on a $P\frac{F'}{F} = -Q\frac{G'}{G}$ et aussi

$$PN_0\frac{F'}{F} = -QN_0\frac{G'}{G}$$

Or P et Q sont premiers entre eux, d'après Gauss, Q divise $N_0\dfrac{F'}{F}$ et que P divise $N_0\dfrac{G'}{G}$.

$\boxed{9}$ Comme Q divise $N_0\dfrac{F'}{F}$, on a :

$$deg(Q) \ \leq \ deg\left(N_0\frac{F'}{F}\right) \ \leq \ n_0(PQR)-1$$

De même pour $deg(P)$. Enfin

$$deg(R) \ = \ deg(P+Q) \ \leq \ Max(deg(P), deg(Q)) \ \leq \ n_0(PQR)-1$$

D'où la preuve du théorème de Mason.

$\boxed{10}$ Si S T et U ne sont pas premiers entre eux, on divise l'équation $S^n + T^n = U^n$ par D^n où D est le pgcd de S, T et U. On se ramène donc au cas où les polynômes sont premiers entre eux.

$\boxed{11}$ On utilise le théorème de Mason dans le cas où $P = S^n$, $Q = T^n$ et $R = U^n$, on obtient :

$$Max\left(deg(S^n), deg(T^n), deg(U^n)\right) \ \leq \ n_0(S^nT^nU^n)-1 \ = \ n_0(STU)-1 \ = \ n_0(S)+n_0(T)+n_0(U)-1$$

Donc

$$Max\left(n.deg(S), n.deg(T), n.deg(U)\right) \ \leq \ n_0(S)+n_0(T)+n_0(U)-1 \ \leq \ deg(P)+deg(Q)+deg(R)-1$$

$\boxed{12}$ En additionnant les 3 équations de la question précédente, on trouve :

$$n.(deg(S)+deg(T)+deg(U)) \ \leq \ 3(deg(P)+deg(Q)+deg(R))-3 \ < \ 3(deg(P)+deg(Q)+deg(R))$$

Après simplification par $deg(S)+deg(T)+deg(U)$, on obtient $n<3$